

2.7 Równanie stanu gazu doskonałego (C7)

Celem ćwiczenia jest zbadanie przemian stanu gazu doskonałego (powietrza) oraz wyznaczenie uniwersalnej stałej gazowej, współczynnika rozszerzalności cieplnej, współczynnika prężności cieplnej i współczynnika ściśliwości objętościowej.

Zagadnienia do przygotowania:

- równanie stanu gazu doskonałego (Clapeyrona);
- prawo Boyle'a Mariotte'a ($T=const$);
- prawo Gay-Lussaca ($p=const$);
- prawo Charlesa ($V=const$);
- definicje współczynników.

Zalecana literatura: [13], [1], [24].

2.7.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Przemiany stanu gazu doskonałego

Stan gazu jest określony przez jego temperaturę T , ciśnienie p , objętość V i ilość substancji n (liczba moli). Jeżeli ilość substancji się nie zmienia, to zmianę objętości związaną ze zmianami temperatury i ciśnienia jest dana przez różniczkę zupełną

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,n} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,n} dp. \quad (2.7.1)$$

Analogicznie, następująca różniczka odpowiada zmianom ciśnienia wraz ze zmianami temperatury i objętości

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,n} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{T,n} dV. \quad (2.7.2)$$

Pochodne cząstkowe we wzorach (2.7.1) i (2.7.2) odpowiadają geometrycznie współczynnikiem kierunkowym stycznych do funkcji $V = f(T)$, $V = f(p)$, $p = f(T)$, $p = f(V)$, a ich wartości zależą od początkowych wartości V_0 , p_0 , czy T_0 .

- współczynnik rozszerzalności cieplnej

$$\gamma_0 = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,n}, \quad (2.7.3)$$

- współczynnik prężności cieplnej

$$\beta_0 = \frac{1}{p_0} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,n}, \quad (2.7.4)$$

- współczynnik ściśliwości objętościowej

$$\chi_0 = \frac{-1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T,n}. \quad (2.7.5)$$

Korzystając ze wzoru (2.7.1) można pokazać, że

$$\gamma_0 = \chi_0 \beta_0 p_0. \quad (2.7.6)$$

Podane współczynniki wykorzystuje się w badaniach nad przemianami stanu gazu. Najczęściej rozważane przemiany i prawa je opisujące to

- przemiana izotermiczna, prawo Boyle’a Mariotte’a ($pV = \text{const}$),
- przemiana izobaryczna, prawo Gay-Lussaca ($V/T = \text{const}$),
- przemiana izochoryczna, prawo Charlesa ($p/T = \text{const}$),
- przemiana adiabatyczna, równanie Poissona ($pV^\kappa = \text{const}$).

Warto pokazać sposób uzyskania wybranych praw. W przypadku przemiany izobarycznej ($p = \text{const}$) z równania (2.7.1) wynika $dV = V_0 \gamma_0 dT$. Dla $\gamma_0 = \text{const}$ scałkowanie równania daje następujący wynik

$$V = V_0[1 + \gamma_0(T - T_0)]. \quad (2.7.7)$$

Z doświadczenia wynika, że zależność (2.7.7) jest liniowa, a przez odpowiedni dobór początku skali temperatur ($T_0 = 1/\gamma_0$ w kelwinach) otrzymujemy równanie

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V}{T}. \quad (2.7.8)$$

Przy przemianie izochorycznej ($V = \text{const}$) z równania (2.7.2) wynika $dp = p_0 \beta_0 dT$, a po scałkowaniu z $\beta_0 = \text{const}$ otrzymujemy

$$p = p_0[1 + \beta_0(T - T_0)]. \quad (2.7.9)$$

Ponownie z doświadczenia wynika, że zależność (2.7.9) jest liniowa, a przez odpowiedni dobór początku skali temperatur ($T_0 = 1/\beta_0$ w kelwinach) otrzymujemy równanie

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p}{T}. \quad (2.7.10)$$

Przy przemianie izotermicznej ($T = \text{const}$) z doświadczenia otrzymujemy zależność

$$pV = p_0 V_0. \quad (2.7.11)$$

W wyniku połączenia równań (2.7.8), (2.7.10) i (2.7.11) otrzymujemy następującą zależność:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0}. \quad (2.7.12)$$

Równanie (2.7.12) może służyć do tzw. redukcji objętości, ciśnienia czy gęstości gazów do warunków normalnych, tj. $T_0 = 0^\circ C = 273.15 K$, $p_0 = 760 mmHg = 101325 Pa$. Jeden mol gazu doskonałego w warunkach normalnych zajmuje objętość $V_m = 0.022414 m^3/mol$, a więc liczbę moli gazu możemy wyliczyć jako $n = V_0/V_m$.

Równanie stanu gazu doskonałego

W przypadku gazu doskonałego parametry stanu połączone są tak zwanym ogólnym równaniem stanu gazu (Clapeyrona)

$$pV = nRT, \quad (2.7.13)$$

gdzie $R = 8.314 J/(mol \cdot K)$ jest uniwersalną stałą gazową. Z równania (2.7.13) wynikają poszczególne równania przemian stanu gazu. Przyjmijmy następujące oznaczenia dla pochodnych cząstkowych

$$a_p = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,n}, \quad a_V = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{V,n}, \quad a_T = \left(\frac{\partial V}{\partial p^{-1}} \right)_{T,n}. \quad (2.7.14)$$

Jeżeli z doświadczenia uzyskamy parametry a_p , a_V i a_T , to możemy obliczyć współczynniki

$$\gamma_0 = \frac{a_p}{V_0}, \quad \beta_0 = \frac{a_V}{p_0}. \quad (2.7.15)$$

Zakładając słuszność równania Clapeyrona możemy wyznaczyć uniwersalną stałą gazową z jednego ze wzorów

$$R = \frac{p_0 a_p}{n}, \quad R = \frac{a_V V_0}{n}, \quad R = \frac{a_T}{n T_0}. \quad (2.7.16)$$

2.7.2 Przebieg pomiarów

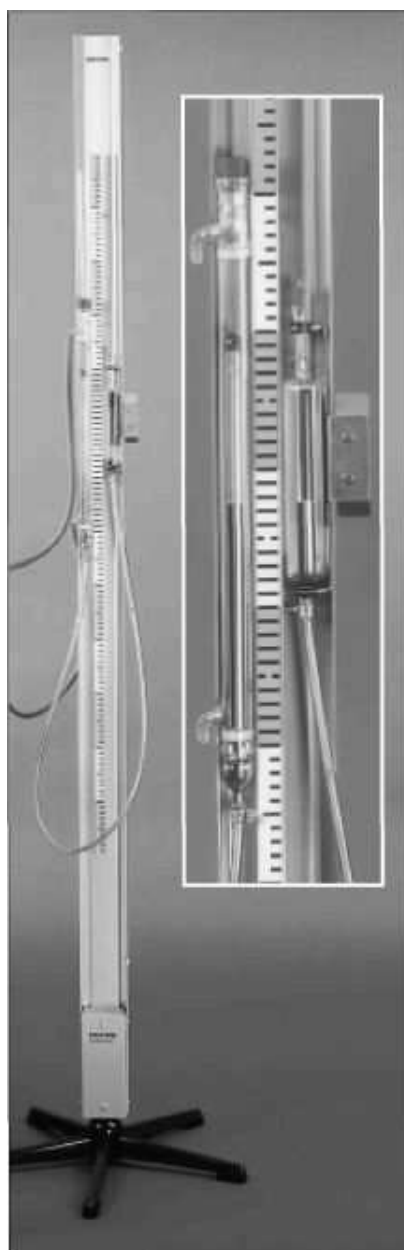
Układ doświadczalny

W skład układu doświadczalnego przedstawionego na rysunku 2.7.1 wchodzi: szklana rurka pomiarowa połączona z manometrem rtęciowym, statyw z przymiarem, termostat przepływowy, zbiornik z wodą destylowaną, termometr rtęciowy, barometr.

W szklanej rurce pomiarowej, połączonej z manometrem rtęciowym w kształcie litery U, znajduje się pewna ilość badanego powietrza. Manometr składa się z elastycznego przewodu z tworzywa sztucznego oraz otwartego zapasowego zbiornika z rtęcią. Rurka pomiarowa jest zamocowana na stałe do statywu, natomiast zbiornik zapasowy manometru jest przesuwany w kierunku pionowym wzdłuż statywu z pomocą samoblokujących się prowadnic. Przez zmianę wysokości zbiornika z rtęcią można zmieniać ciśnienie i objętość badanego gazu. W celu zmiany temperatury badanego gazu rurka pomiarowa jest otoczona kołnierzem rurkowym, połączonym z termostatem przepływowym.

Objętość V badanego powietrza jest proporcjonalna do odczytanej wysokości l kolumny powietrza:

$$V = \pi(d/2)^2 l + V_z, \quad (2.7.17)$$



Rys. 2.7.1: Układ doświadczalny do badania równania stanu gazu doskonałego.

gdzie $d = 1.14\text{cm}$ to średnica wewnętrzna rurki pomiarowej, $V_z = 1.02\text{ml}$ objętość zaznaczonej zaokrąglonej części zbiornika. Ciśnienie badanego powietrza obliczamy ze wzoru

$$p = p_a + ha_h, \quad (2.7.18)$$

gdzie p_a to zewnętrzne ciśnienie powietrza, h różnica wysokości poziomów rtęci, $a_h = (400/3)Pa/mm$ współczynnik proporcjonalności. W zależności od tego, czy poziom rtęci jest wyższy w zbiorniku zapasowym czy pomiarowym, należy stosować h ze znakiem dodatnim lub ujemnym.

Przebieg doświadczenia

Zmierzyć zewnętrzne ciśnienie powietrza p_a . W pierwszej części doświadczenia należy ustalić temperaturę T_1 do pomiaru zależności p i V przy stałym $T = T_1$. Należy włączyć termostat przepływowy, który zagwarantuje stałość T_1 . Zmieniając położenie zbiornika zapasowego z rtęcią należy zmieniać ciśnienie badanego powietrza. Wykorzystujemy cały dostępny zakres położenia zbiornika, zmieniamy położenie zbiornika co około $5cm$. Notować różnicę poziomów rtęci h i długość słupa powietrza w rurce l .

W drugiej części doświadczenia należy wyznaczyć wpływ temperatury na ciśnienie i objętość gazu. Badany gaz podgrzewamy za pomocą termostatu przepływowego. Należy zauważyć, że temperatura ustawiana na termostacie może różnić się od temperatury mierzonej termometrem rtęciowym umieszczonym bezpośrednio przy rurce pomiarowej. Po każdej zmianie temperatury należy poczekać na jej ustabilizowanie. W temperaturze początkowej T_1 ustalamy ciśnienie gazu na $p_1 = p_a$ poprzez wyrównanie poziomów rtęci w rurce pomiarowej i zbiorniku zapasowym. W ten sposób ustalamy też objętość V_1 . Należy zaznaczyć poziom rtęci markerem na rurce pomiarowej. Następnie należy podnosić temperaturę w krokach co około 5 stopni dochodząc do temperatury wrzenia wody. W każdej temperaturze wyznaczamy: (1) objętość V przy stałym ciśnieniu $p = p_1$ (równoważymy poziomy rtęci w rurce pomiarowej i zbiorniku zapasowym); (2) ciśnienie p przy stałej objętości $V = V_1$ (zmieniając różnicę poziomów rtęci h doprowadzamy gaz do pierwotnej objętości V_1). Oprócz temperatury notujemy odpowiednio długość słupa powietrza w rurce l dla (1) i różnicę poziomów rtęci h dla (2).

2.7.3 Opracowanie wyników

Korzystając z pomiarów h i l wyliczyć ciśnienie p i objętość V dla wszystkich punktów pomiarowych. Zrobić wykresy zależności objętości od ciśnienia oraz objętości od odwrotności ciśnienia przy stałej temperaturze T_1 . Do drugiej zależności dopasować prostą metodą regresji liniowej.

Wykonać wykresy zależności objętości od temperatury ($p = \text{const}$) i zależności ciśnienia od temperatury ($V = \text{const}$). Do wykresów dopasowujemy proste metodą regresji liniowej.

Ze współczynników kierunkowych prostych uzyskujemy wartości pochodnych cząstkowych a_p , a_V i a_T . Należy pamiętać, że współczynniki te odnoszą się do warunków panujących w czasie eksperymentu (p_1 , V_1 , T_1), a nie do warunków normalnych (p_0 ,

V_0, T_0). Za pomocą redukcji objętości V_1 do V_0 z równania (2.7.12) znajdujemy liczbę moli n badanego powietrza. Dalej ze wzorów (2.7.16) wyznaczamy trzy wartości uniwersalnej stałej gazowej R , a końcowe R będzie średnią ważoną tych wartości. Z równań (2.7.15) wyznaczamy współczynniki γ_1 i β_1 , a korzystając ze związku (2.7.6) wyliczamy χ_1 .

Przeprowadzić analizę niepewności, a wyniki porównać z wartościami tablicowymi. Należy sprawdzić związki

$$\gamma_1 = 1/T_1, \beta_1 = 1/T_1, \chi_1 = 1/p_1, \quad (2.7.19)$$

gdzie temperatura T_1 wyrażona jest w kelwinach.