

V9 - Symulacja drgań wymuszonych oscylatora tłumionego

I Pracownia Fizyczna, WFAIS UJ

1. Cel ćwiczenia

Wyznaczenie amplitudy drgań wymuszonych od częstości siły wymuszającej dla kilku wartości: *masy m*, *stałej b siły tłumiącej* (proporcjonalnej do prędkości) oraz *stałej sprężystości k sprężyny*.

2. Podstawowe wiadomości

Podstawowe wiadomości są przedstawione w instrukcji do [M22](#) oraz [V7](#). Poniżej jedynie podsumowanie podane z jednolitym użyciem symboli dla związanych parametrów.

Równanie sił **swobodnego oscylatora harmonicznego** dla to układu sprężyny o *stałej sprężystości (albo sztywności) k* i ciała o *masie m*:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1a)$$

Rozwiązaniem jest wychylenie dane wzorem:

$$x(t) = A_x \cos(\omega t + \phi_x) \quad (1b)$$

gdzie ω – częstość kołowa drgań, związana z okresem T przez relację $\omega = 2\pi/T$ oraz:

$$\omega^2 = k/m \quad (1c)$$

Równanie **oscylatora harmonicznego tłumionego** oporem proporcjonalnym do prędkości, o *stałej siły tłumiącej b*:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (2a)$$

Rozwiązaniem jest wychylenie dane wzorem:

$$x(t) = A_x \exp(-\beta t) \cos(\omega_1 t + \phi_x) \quad (2b)$$

gdzie *współczynnik tłumienia* $\beta = b/(2m)$ jest mniejszy niż ω (przypadek słabego tłumienia), dla częstości kołowej drgań ω_1 danej wzorem:

$$\omega_1^2 = \omega^2 - \beta^2 = k/m - b^2/(4m^2) \quad (2c)$$

Równanie **wymuszonego oscylatora harmonicznego ze słabym tłumieniem** otrzymujemy, gdy wprowadzimy okresową siłę wymuszającą, np. harmoniczną o *częstości wymuszającej* Ω . Wprowadzimy go przy użyciu oznaczeń na ω oraz β :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \cos(\Omega t) \quad (3a)$$

Rozwiązaniem jest wychylenie dane wzorem:

$$x(t) = A \cos(\Omega t - \delta) \quad (3b)$$

dla amplitudy A i przesunięcia fazowego δ równym:

$$A = \frac{f}{[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta\Omega)^2]^{1/2}} \quad (3c)$$

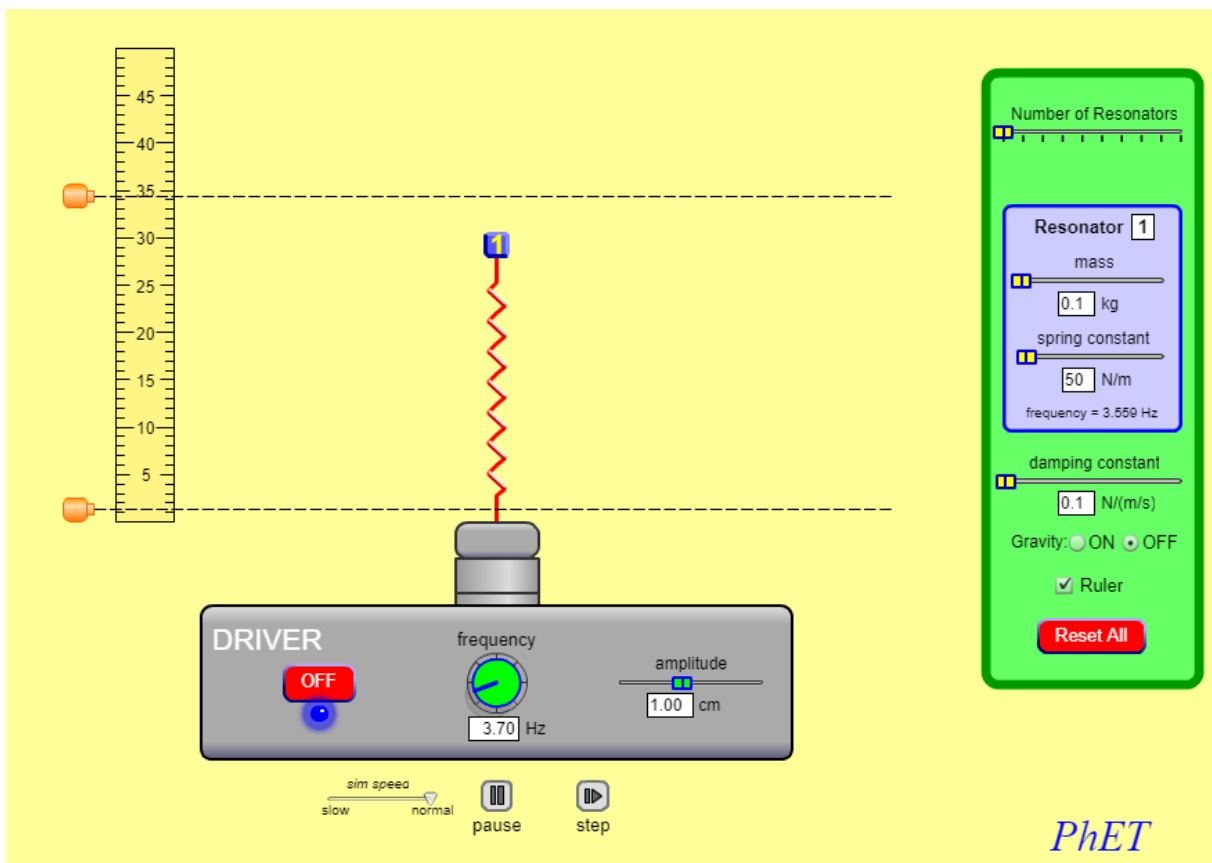
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\beta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (3d)$$

Maksimum wychylenia wymuszonego, czyli rezonans występuje dla **częstości rezonansowej Ω_r** :

$$\Omega_r^2 = \omega^2 - 2\beta^2 = k/m - \frac{b^2}{2m^2} \quad (3e)$$

3. Układ doświadczalny

Do wykonania ćwiczenia użyj aplikacji z PhET Interactive Simulations (<https://phet.colorado.edu/>). Jest to platforma zawierająca symulacje z różnych dziedzin nauki, założona przez laureata Nagrody Nobla Carla Wiemana. Użyj symulacji https://phet.colorado.edu/sims/resonance/resonance_en.html, zgodnej z **Rys.1**.

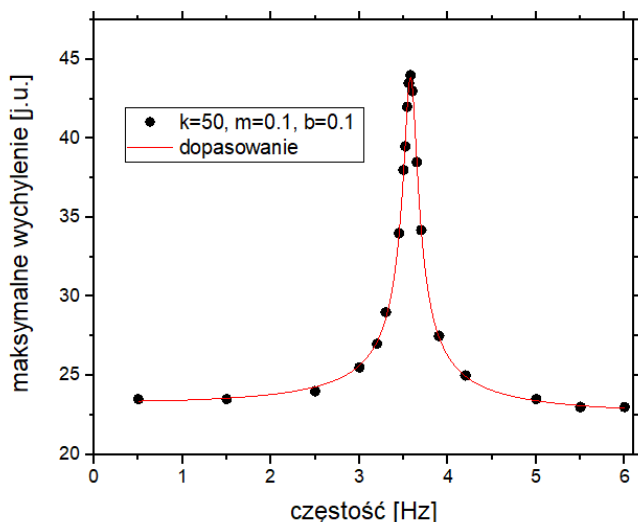


Rys. 1. Układ PhET Interactive Simulations do badania rezonansu.

W powyższym układzie symulacyjnym *częstość wymuszająca* F (frequency) jest związana z kołową częstością $F = (\Omega/2\pi)$ użytą we wcześniejszych wzorach. Natomiast stała tłumienia (damping constant) z układu symulacyjnego to *stała b siły tłumiącej* (proporcjonalnej do prędkości). Układ symulacyjny pozwala także zadać wartość *masy m* i *stałą sprężystości k sprężyny*. Dodatkowo, układ pozwala na jednoczesną symulację drgań wymuszonych kilku sprężyn. Wreszcie, posiada linijkę za pomocą której można wyznaczyć maksymalne wychylenia przy spowolnionym (co 'klatka') ruchu sprężyny i masy.

4. Możliwy przebieg eksperymentu

1. Dla zadanych parametrów k [N/m], m [kg], b [N/(m/s)] wysymuluj wymuszone drgania sprężyny dla różnych wartości *częstości wymuszającej* F a następnie wykreśl zależność od F maksymalnego wychylenia (np. **Rys. 2**). Dopasuj teoretyczną krzywą rezonansową podaną wzorem (3c) wraz ze stałą C wiążącą maksymalne wychylenie z amplitudą drgań. Porównaj otrzymane z dopasowania parametry krzywej rezonansowej z tymi, które są wynikają z zadanych wartości parametrów k , m i b .



Rys.2. Krzywa rezonansowa dla zadanych parametrów k , b , m uzyskana z symulacji dla różnych częstości (punkty 'doświadczalne') oraz dopasowana krzywa teoretyczna.

2. Wyznacz serie krzywych rezonansowych dla różnych wartości *stałej b siły tłumiącej* (proporcjonalnej do prędkości) przy stałych wartościach *masy m* i *stałej sprężystości k sprężyny*. Wyznacz *szerokość połówkową* (szerokość krzywej rezonansowej w połowie wysokości) $\Delta\Omega_r$ oraz *dobroć układu rezonansowego* $Q = \Omega_r / \Delta\Omega_r$. Omów otrzymane wyniki.

3. Wyznacz serie krzywych rezonansowych dla zmiennego jednego parametru m (k) przy stałych pozostałych parametrach: b , k (m). Oceń wpływ parametrów k , b , m na kształt i położenie krzywej rezonansowej.