

V6 – Analiza ruchu z użyciem programu Tracker

I Pracownia Fizyczna, WFAIS UJ

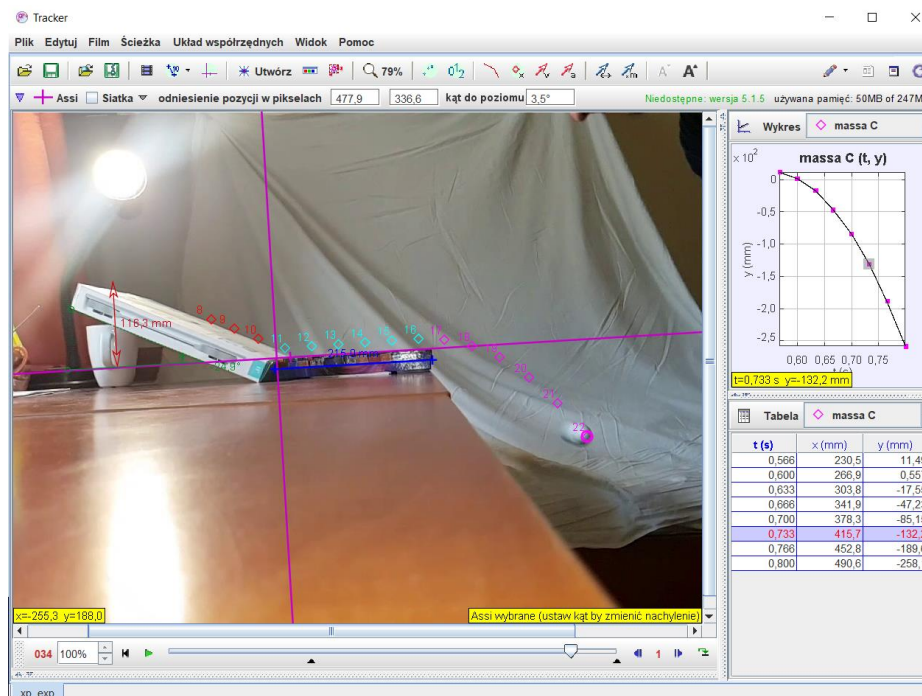
1 CEL ĆWICZENIA

Zbadaj ruch ciała w samodzielnie skonstruowanym prostym układzie doświadczalnym. Wyznacz i opisz trajektorię ruchu ciała. Wykorzystaj w tym celu program do analizy filmów [Tracker](#). W analizowanym przykładzie badany będzie ruch, którego trajektoria może być podzielony na trzy fragmenty:

- A. staczanie się ciała po równi pochyłej,
- B. jednostajne toczenie się ciała,
- C. rzut poziomy.

2 UKŁAD DOŚWIADCZALNY

Badanym ciałem może być kulka lub walec (najlepiej pełny, np. napełniona wodą butelka). Przykładowy domowy układ eksperymentalny pokazany jest na Rys.1.



Rysunek 1. Układ eksperymentalny i analiza ruchu w programie Tracker. Poruszającym się ciałem jest napełniona wodą biała butelka. Przejście pomiędzy końcem równi i poziomą płaszczyzną jest stosunkowo płynne.

W pierwszej fazie ruchu (A) ciało stacza się po równi pochyłej (kąt $30^\circ - 45^\circ$). Zakładamy staczanie się bez poślizgu. Na dole równi, z zeszytów, skonstruowana jest płaszczyzna pozioma (ruch B), która sięga do krawędzi stołu. W ostatniej fazie (C) ruch ciała może być opisany jako rzut poziomy.

Do rejestracji ruchu może być użyty np. aparat fotograficzny ze smartfonu lub kamera internetowa. Jeżeli nie masz do dyspozycji takich urządzeń lub Twoje urządzenie nagrywa w zbyt słabej jakości, to możesz wykonać analizę pliku wideo ze strony IPF. Aby zminimalizować paralaksę, kamera powinna być umieszczona jak najdalej od układu. Badany obiekt powinien być łatwo odróżnialny od tła. Możesz użyć dodatkowego oświetlenia. Choć program `Tracker` pozwala na dowolną orientację układu współrzędnych (Rys. 1), to spróbuj w miarę dobrze zorientować kamerę.

Aby prawidłowo zmierzyć odległości użyj obiektu referencyjnego. Obiekt ten powinien znajdować się w płaszczyźnie układu doświadczalnego, tj. w tej samej odległości od kamery. Na Rys. 1 jako referencji użyto zeszytu A5, którego okładka ma ok. 215 mm. Możesz też użyć linijki.

3 PRZEBIEG DOŚWIADCZENIA

Szczegóły opisujące analizę z użyciem programu `Tracker` znajdują się w końcowych rozdziałach. Doświadczenie może mieć następujący przebieg.

1. Nagraj film i przenieś go na komputer.
2. Otwórz program `Tracker` i wczytaj zarejestrowany film (możesz film po prostu przeciągnąć do okna).
3. Ustal klatki początkową i końcową. Nagrany film będzie prawdopodobnie dłuższy niż sam ruch ciała.
4. Wybierz układ współrzędnych (początek i orientację).
5. Użyj narzędzia kalibracji na obiekcie o znanych wymiarach.
6. W programie `Tracker`, zmierz wysokość h i kąt α równi pochyłej.
7. Dodaj nową “masę punktową” (A) i prześledź jej trajektorię (staczanie się ciała).
8. Dodaj nową “masę punktową” (B) i prześledź jej trajektorię (toczenie się ciała).
9. Dodaj nową “masę punktową” (C) i prześledź jej trajektorię (ruch poziomy).
10. Wyeksportuj następujące dane do plików tekstowych (lub arkuszy itp.):
 - masa A: (t, v)
 - masa B: (t, x)
 - masa C: $(t, x), (t, y), (t, v_y)$
11. Wstępna analiza danych (dopasowanie) może być przeprowadzona bezpośrednio w programie `Tracker`. Niestety program nie oblicza niepewności pomiarowych.

4 ANALIZA DANYCH

4.1 FAZA A

Ruch po równi pochyłej przybliżymy jako staczanie się bez poślizgu [1,2]. Równanie ruchu może być zapisane jako:

$$I \frac{d\omega}{dt} = -mgr \sin\alpha, \quad (1)$$

gdzie m jest masą ciała, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, r jest promieniem ciała (kuli lub walca), α jest nachyleniem równi, ω jest prędkością kątową ciała, I jest momentem bezwładności ciała liczonym względem punktu styku ciała z równią:

$$I = I_{CM} + mr^2. \quad (2)$$

W równaniu (2), I_{CM} jest momentem bezwładności względem osi przebiegającej przez środek masy:

$$I_{CM}^{kula} = \frac{2}{5}mr^2, \quad I_{CM}^{walec} = \frac{1}{2}mr^2. \quad (3)$$

Dla ruchu czysto obrotowego prędkość v i przyspieszenie ciała a mogą być zapisane jako:

$$v = -r\omega \quad \rightarrow \quad a = -r \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgr^2 \sin\alpha}{I}. \quad (4)$$

Dlatego, dla rozważanych kształtów, przyspieszenia są opisane przez:

$$a^{kula} = \frac{5}{7}g \sin\alpha, \quad a^{walec} = \frac{2}{3}g \sin\alpha, \quad (5)$$

a zależność czasową prędkości można zapisać jako:

$$v(t) = v_0 + at. \quad (6)$$

Problem A

Dopasuj zależność daną równaniem (6) do danych (t, v) zapisanych dla ruchu A. Porównaj wyznaczoną wartość przyspieszenia z wartością teoretyczną daną przez równanie (5).

4.2 FAZA B

Spodziewamy się ruchu jednostajnego z prędkością $v_x = \text{const}$, w którym

$$x(t) = x_0 + v_x t. \quad (7)$$

Prędkość ciała na końcu fazy A i w fazie B są równe $v_x = v_A$. Tę wartość możemy obliczyć z zasady zachowania energii dla równi.

$$mg(h+r) = \frac{1}{2}I\omega^2 + mgr. \quad (8)$$

Przy założeniu ruchu bez poślizgu mamy $v = -r\omega$ co pozwala nam obliczyć prędkość końcową w fazie A:

$$v_A = \sqrt{\frac{2mghr^2}{I}}. \quad (9)$$

Dla kuli i walca mamy:

$$v_A^{kula} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}, \quad v_A^{walec} = \sqrt{\frac{4gh}{3}}. \quad (10)$$

Problem B

Dopasuj zależność daną równaniem (7) do danych (t, x) zapisanych dla ruchu B. Porównaj wyznaczoną wartość prędkości z wartością daną przez równanie (10).

4.3 FAZA C

Po przekroczeniu krawędzi stołu, ciało będzie poruszać się ruchem jednostajnym w kierunku x i swobodnie spadać. Prędkość pionowa jest opisana przez:

$$v_y(t) = v_{y,0} - gt. \quad (11)$$

Zależności czasowe położenia można zapisać jako:

$$y(t) = y_0 + v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (12)$$

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t. \quad (13)$$

Dlatego trajektoria ciała może być opisana parabolą:

$$y = -\frac{g}{2v_{0,x}^2}x^2 + \left(\frac{gx_0}{v_{0,x}^2} + \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}\right)x + \left(-\frac{gx_0^2}{2v_{0,x}^2} - \frac{x_0v_{0,y}}{v_{0,x}} + y_0\right). \quad (14)$$

Problem C

Dopasuj zależność daną równaniem (11) do danych (t, v_y) zapisanych dla ruchu C. Przedyskutuj parametry dopasowania. Z danych (t, x) and (t, y) utwórz (x, y) . Dopasuj do tych danych zależność (14) – pokaż tym samym, że trajektoria ruchu jest dana przez parabolę.

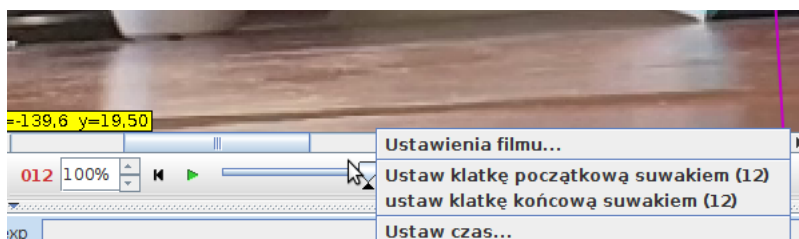
5 PROGRAM TRACKER

Analiza danych w doświadczeniu wykonywania jest z użyciem program Tracker, który może być zainstalowany (także w wersji polskiej) z <https://physlets.org/Tracker>.

Dobrym punktem startowym może być obejrzenie krótkiej instrukcji wprowadzającej w podstawowe narzędzia tego programu <https://www.youtube.com/watch?v=n4Eqy60yYUY>.


5.1 USTAWIANIE KLATEK STARTOWEJ I KOŃCOWEJ

Przesuń wskaźnik wideo do początkowej (końcowej) klatki i kliknij prawy przycisk myszy. Ustaw odpowiednią klatkę jak na Rys. 2.



Rysunek 2. Ustawianie klatki początkowej i końcowej.

5.2 DEFINIOWANIE UKŁADU WSPÓLRZĘDNYCH

W menu obrazkowym kliknij . Przesuń początek do odpowiedniego punktu, np. do dolnej krawędzi równi. Chwyć jedną z osi aby ustawić orientację.

5.3 KALIBRACJA

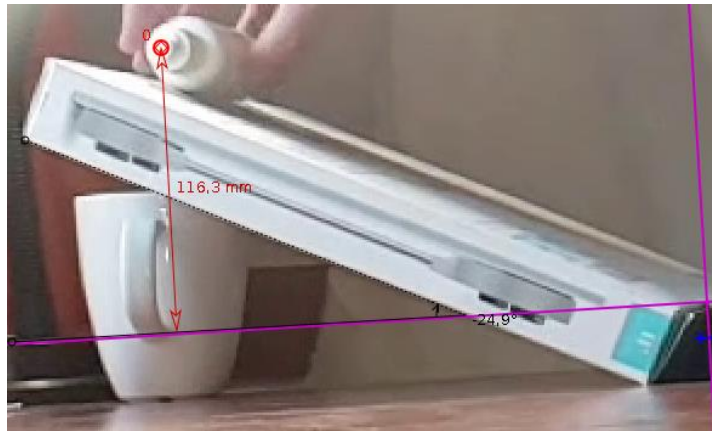
Kliknij Ścieżka → Nowa → Narzędzia kalibracji → Prosta kalibracji. Trzymając SHIFT, kliknij pierwszy, a następnie drugi punkt w obiekcie referencyjny. Pojawi się strzałka i wartość którą możesz modyfikować. Wpisz odpowiednią wartość i jej jednostkę (patrz Rys. 3).



Rysunek 3. Procedura kalibracji.

5.4 POMIARY WYSOKOŚCI I NACHYLENIA RÓWNI

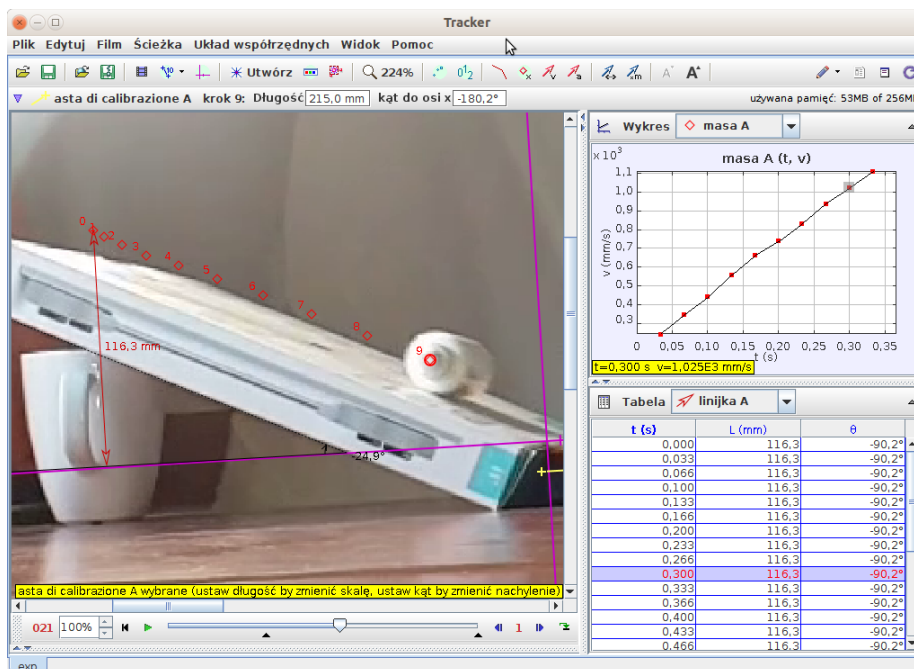
Kliknij Ścieżka → Nowa → Narzędzia pomiarowe → Linijka pomiarowa (lub kątomierz). Przykład pomiarów pokazany jest na Rys. 4.



Rysunek 4. Pomiar wysokości i nachylenia równi pochyłej.

5.5 ŚLEDZENIE RUCHU CIAŁA

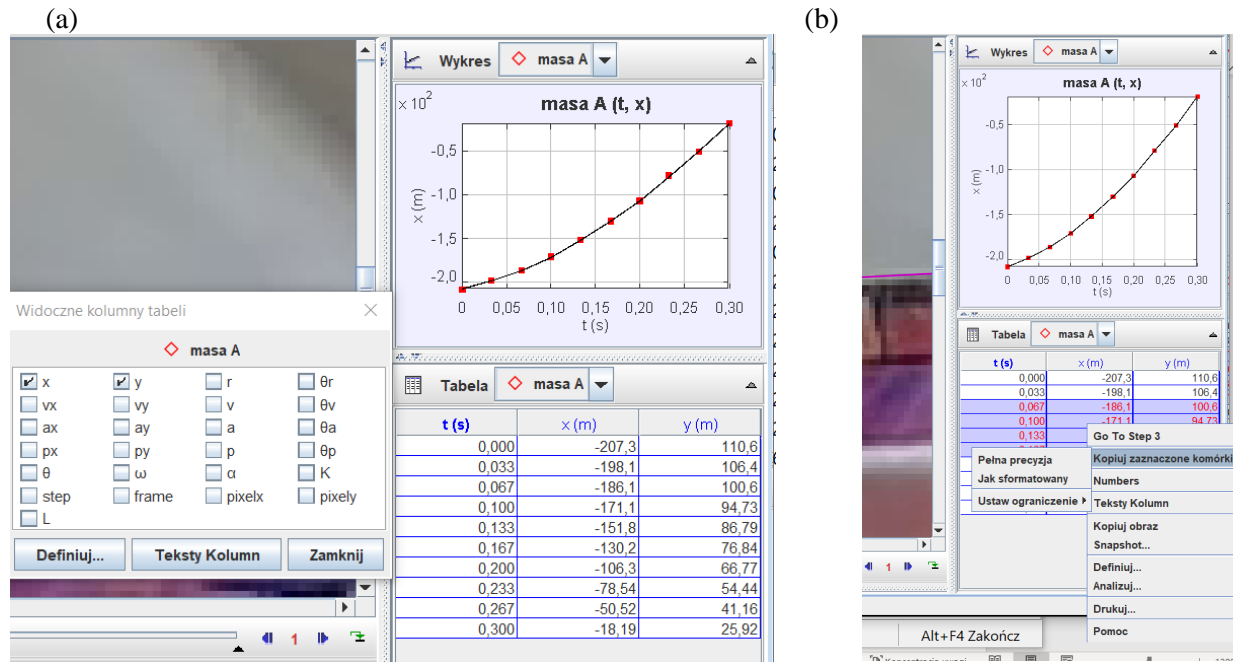
Aby prześledzić ruch ciała, najpierw zdefiniuj nową „masę punktową” (Ścieżka → Nowa → Masa punktowa). Przewiń film do początku fazy ruchu. Trzymając SHIFT, kliknij w środek masy ciała (wyznacz go „na oko”) - program zapisze pozycję oraz czas i przejdzie do następnej klatki. Powtórz procedurę, aż do końca śledzonej fazy ruchu. Powiększenie (myszą) pozwala na większą precyzję. Przykład prześledzonej trajektorii pokazany jest na Rys. 5. Program Tracker posiada również bardziej zaawansowane narzędzia do śledzenia (np. automatycznego) – oczywiście można ich użyć, ale należy sprawdzić czy dają sensowne i wiarygodne wyniki.



Rysunek 5. Śledzenie trajektorii.

5.6 EKSPORT DANYCH

Przede wszystkim upewnij się, że zaznaczyłeś odpowiednią fazę ruchu (A,B,C), klikając na odpowiednią masę obok przycisku Tabela (patrz Rys. 6). Następnie klikając przycisk Tabela zaznacz interesujące Cię wielkości i zamknij okno selekcji. Zaznacz komórki i po kliknięciu prawym klawiszem myszy wybierz Kopiuj zaznaczone komórki (pełna precyzja). Możesz teraz wkleić zaznaczone komórki do pliku tekstowego lub do programu, którego używasz.



Rys. 6. Eksport danych. (a) Wybieranie rodzaju danych. (b) Kopiowanie komórek

6 FORMA SPRAWOZDANIA

Sprawozdanie przygotuj tylko w formie elektronicznej i wyślij do asystenta. Preferowany format to PDF. W sprawozdaniu zamieść:

- 1) Zredukowane do absolutnego minimum „podstawy teoretyczne”, które zawierają tylko wiadomości niezbędne do analizy ćwiczenia, np. równania które bezpośrednio wykorzystujesz w analizie danych.
- 2) „Zrzuty” ekranu z programu Tracker, w którym widać zarówno układ doświadczalny jak i prześledzone trajektorie ruchu.
- 3) Opracowanie wyników i ich dyskusję.
- 4) Dodatkowo prześlij asystentowi pliki tekstowy lub arkusz kalkulacyjny z danymi opisującymi trajektorię (patrz punkt 3.10).

7 LITERATURA

Prawdopodobnie większość z Was może nie mieć dostępu do książek. Podajemy zatem pozycje, które można znaleźć w sieci.

- [1] [M. Molenda, Prędkość kulki staczającej się z równi pochyłej, Foton 132, Wiosna 2016, str. 50.](#)
- [2] [T. Idema, Mechanics and relativity, Physics, Libre Texts.](#)