I PRACOWNIA FIZYCZNA

dla studentów
CHEMII ZRÓWNOWARZONEGO ROZWIJU

http://www.1pf.if.uj.edu.pl/

JAGIELLONIAN UNIVERSITY
IN KRAKÓW

2022/2023

Kraków

1PF

I PRACOWNIA FIZYCZNA
dla studentów I roku
CHEMII ZRÓWNOWARZONEGO ROZWIJU

rok akademicki 2022/23, semestr zimowy

Czwartek 12:30-14:30

Prowadzący:
dr Magdalena Skurzok Michał
Palczewski
Tomasz Szołdra
Piotr Sowa
dr hab. Kamil Awsiuk (tutor)
e-mail: kamil.awsiuk@uj.edu.pl

Zespół I Pracowni Fizycznej:
prof. dr hab. Paweł Korecki (kierownik IPF)
e-mail: pawel.korecki@uj.edu.pl
Pracownicy:
Janusz Konarski
Andrzej Barecki

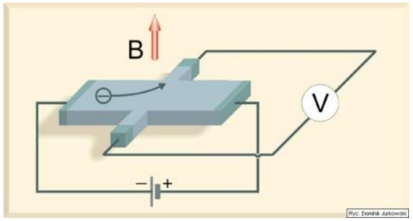
Po co tu jesteśmy?

1. Nauka podstaw wykonywania badań i opracowania wyników pomiarów:
- planowanie badań i prowadzenie notatek
- pomiar wielkości fizycznych i ich analiza wraz z szacowaniem niepewności
- pisanie sprawozdań

2. Obserwacja zjawisk fizycznych. Samodzielne wykonywanie doświadczeń.

M21

E5



2. Nauka obsługi prostych i trochę bardziej skomplikowanych przyrządów pomiarowych.

Kalendarium

13.paź	Zebranie organizacyjne
20.paź	Ćwiczenie 1
27.paź	Ćwiczenie 2
03.lis	zdalne
10.lis	Ćwiczenie 3
17.lis	Ćwiczenie 4
24.lis	Ćwiczenie 5
01.gru	Ćwiczenie 6
08.gru	Termin rezerwowy 1
15.gru	Termin rezerwowy 2

Sprawy zdrowotne:

- ograniczenia możliwości wykonywania pewnych ćwiczeń ze względów zdrowotnych
- zwolnienia lekarskie za nieobecność na ćwiczeniach

Do zaliczenia należy wykonać 6 ćwiczeń:
O2, C1, C4, E3, F6, O7

- Każde ćwiczenie wyznaczane jest na konkretną sesję zajęciową i umieszczane na stronie internetowej I Pracowni Fizycznej oraz platformie MS Teams
- W przypadku nieobecności na zajęciach, wyznaczone na tę sesję ćwiczenie nie czeka na następny tydzień (proszę śledzić aktualny przydział ćwiczeń)
- Możliwość transferu zaliczenia ćwiczeń wykonanych i zaliczonych na innych uczelniach; warunek – zaliczenie ćwiczenia na minimum 4.0
- Niezaliczone ćwiczenia liczne są do średniej jako 0 („zero”)!
- Istnieją dwa terminy zajęć dodatkowych

Jak wygląda życie na pracowni?

- Do Pracowni należy przyjść punktualnie. Kurtki i duże torby należy zostawić w szatni.

- Dopuszczenie do wykonywania ćwiczenia;

✓ należy posiadać:
  - zeszyt laboratoryjny (A4, numerowane strony, podpisany, nr. USOS studenta)
  - plan pracy na piśmie (który jest częścią sprawozdania)

✓ pozytywny wynik pisemnego (10-15min) kolokwium wstępnego (przeprowadzonego przez prowadzącego ćwiczenie)

- Przygotowanie stanowiska do wykonania pomiarów, w tym wypożyczenie wyposażenia dodatkowego np. suwmiarka, stoper, mierniki uniwersalne…

urządzenia elektryczne i zbudowane własnoręcznie obwody elektryczne student włącza do sieci tylko w obecności i za zgodą asystenta

- Przystąpienie do wykonania pomiarów.
  Wyniki pomiarów należy zapisywać w zeszycie laboratoryjnym długopisem lub piórem.

opuszczenie terenu Pracowni w czasie trwania zajęć jest dozwolone tylko za zgodą asystenta

- Po zakończeniu pomiarów należy:
  - oddać wypożyczone przyrządy,
  - uporządkować stanowisko pracy,
  - uzyskać podpis asystenta w zeszycie laboratoryjnym

Jak wygląda życie na pracowni?

Główne składniki sprawozdania

Tytuł *np.* M-5: Badanie drgań wahadła anharmonicznego.
Autor Jan Maria Kowalski

Wstęp: wprowadzenie w badane zjawisko………
Opis doświadczenia:………
Plan pracy:
Wyniki: surowe - w postaci tabel i wykresów (rysunków):
Opracowanie wyników: włącznie z analizą niepewności pomiarowych:
Omówienie wyników:……………………….
Podsumowanie:…………………
Podziekowania:…………………….:
Literatura
Załaczniki:

Z1. kserokopia wyników pomiarowych;
Z3 Wydruk arkusza kalkulacyjnego

Sprawozdanie powinno być oddane na <u>najbliższej sesji</u>.

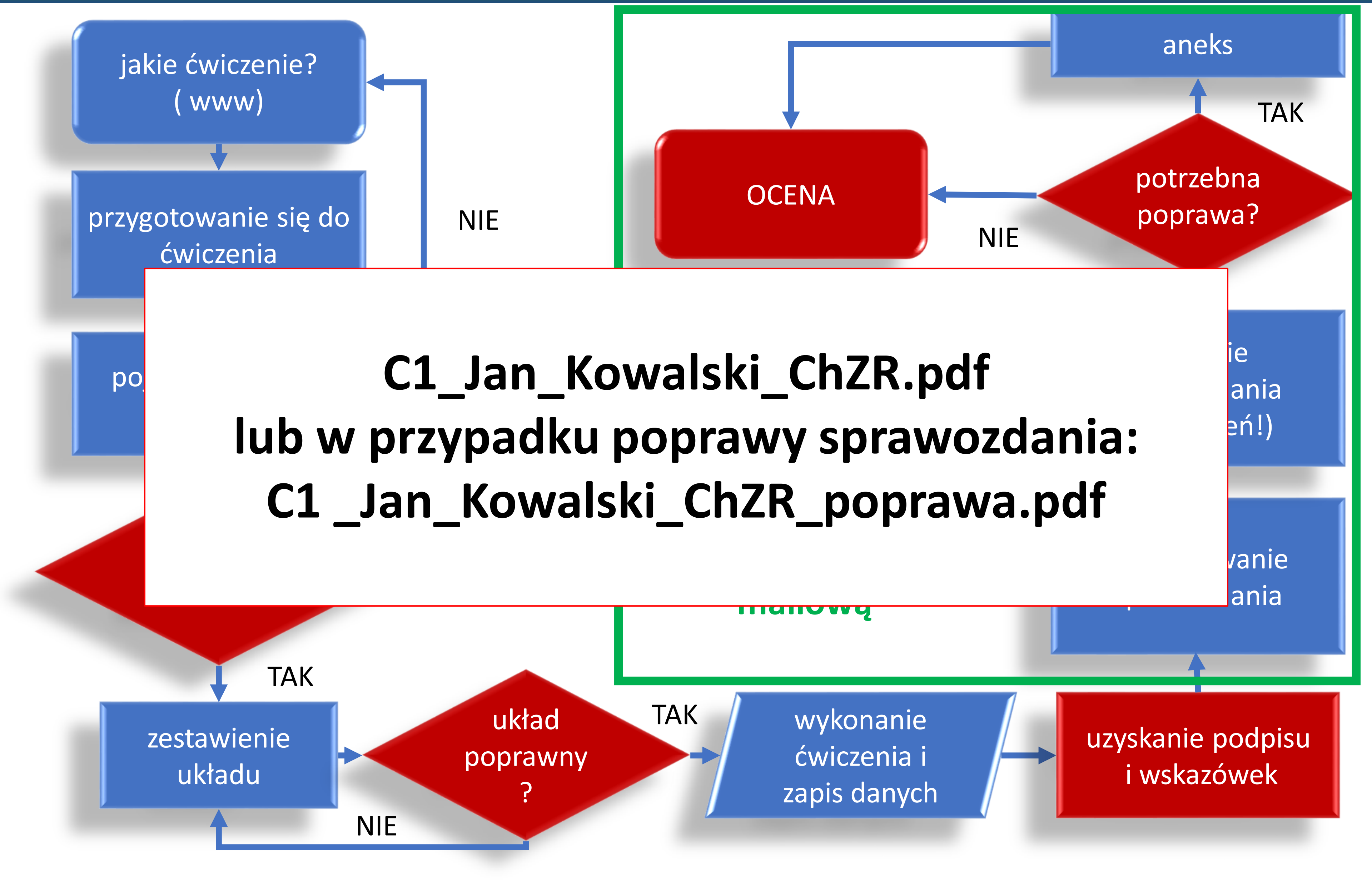
- Opóźnienie oddania sprawozdania o <u>1 sesję</u> skutkuje odjęciem 0.5 pkt;
- Maksymalnie mogą być <u>dwa spóźnienia</u> – skutkujące odjęciem 1 pkt za to ćwiczenie;
- Zaleganie z oddaniem sprawozdania <u>więcej niż 2 sesje</u> skutkuje otrzymaniem oceny 0
- <u>Ostateczny termin oddania</u> sprawozdań upływa po z dniem rozpoczęcia zimowej sesji egzaminacyjnej.

Jak wygląda życie na pracowni?

14.paź	21.paź	28.paź	04.lis	18.lis	25.lis	02.gru	09.gru
Wykonanie ćwiczenie	Oddanie sprawozdania	Otrzymanie sprawozdania do poprawy	Oddanie poprawy	Otrzymanie oceny			

14.paź	21.paź	28.paź	04.lis	18.lis	25.lis	02.gru	09.gru
Wykonanie ćwiczenie	Brak sprawozdania -0.5 do oceny	Oddanie sprawozdania Brak sprawozdania -0.5 do oceny	Oddanie sprawozdania Otrzymanie sprawozdania do poprawy	Oddanie poprawy Otrzymanie sprawozdania do poprawy	Oddanie poprawy Otrzymanie oceny	Otrzymanie oceny	

Jak wygląda życie na pracowni?



C1_Jan_Kowalski_ChZR.pdf
lub w przypadku poprawy sprawozdania:
C1 _Jan_Kowalski_ChZR_poprawa.pdf

Zaliczenie pracowni i ocena

I. Warunkiem uzyskania zaliczenia jest uzyskanie przez studenta średniej arytmetycznej z cząstkowych ocen za poszczególne ćwiczenia ≥3.0 (bez uwzględnienia spóźnień). Cząstkowe oceny za niezaliczone ćwiczenia liczone są jako 0 (zero).

II. Ćwiczenie niezaliczone (0.0 pkt): niewykonanie ćwiczenia (w ramach zajęć i zajęć dodatkowych), nieoddanie sprawozdania, plagiat

III. Ocena końcowa z I Pracowni Fizycznej jest średnią arytmetyczną z cząstkowych ocen za poszczególne ćwiczenia (z uwzględnieniem spóźnień), zaokrągloną do 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0. Cząstkowe oceny za niezaliczone ćwiczenia liczone są jako 0 (zero). Jeżeli tak liczona średnia jest niższa niż 3.0, a spełniony jest warunek I. to student uzyskuje zaliczenie na ocenę *dostateczny* (3.0).

Zaliczenie pracowni i ocena

Kopiowanie „cut-and-paste" lub przepisanie jakiegokolwiek tekstu *z jakiegokolwiek źródła bez klarownego zaznaczenia cytatu „..." i zrobienia w tekście sprawozdania referencji do tego źródła jest PLAGIATEM.*

Kopiowanie „cut-and-paste" lub przerysowanie jakiejkolwiek grafiki *z jakiegokolwiek źródła bez klarownego zrobienia w tekscie sprawozdania referencji do tego źródła jest PLAGIATEM (referencje dajemy w podpisie pod grafiką (opisie tabeli)).*

Zawsze robimy odnośniki do źródeł informacji, z których wzięliśmy cytowaną informację (wzór, stwierdzenie, opis urządzenia, ilustrację.)

przykład:

......Jak podano we wstępie do [3], „Książka przygotowana została dla potrzeb studentów wykonujących ćwiczenia na I Pracowni Fizycznej."

Literatura źródłowa:

1. Isaac Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Jussu Societatis Regiæ ac Typis Joseph Streater, Londyn, 1687), str. 15.
2. T. Dryński, *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki* (PWN, Warszawa, 1980), str. 67.
3. A. Magiera (Red.) *I Pracownia Fizyczna* (IFUJ, Kraków, 2010).

Statystyczne Metody Opracowania Wyników Pomiarów

Opracowanie: dr Katarzyna Gajos

Modyfikacje: dr hab. Kamil Awsiuk

JAGIELLONIAN UNIVERSITY
IN KRAKÓW

2022/2023

Kraków

Polecana literatura

[1] *I Pracownia fizyczna,* Andrzej Magiera red. , Oficyna Wydawnicza IMPULS, Kraków 2006; *http://www.1pf.if.uj.edu.pl/materialy/zalecana-literatura*

[2] H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN, Warszawa 1999.

[3] A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.

[4] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, W-wa 1999.

[5] G. L. Squires, *Praktyczna fizyka*, PWN, Warszawa 1992.

[6] *http://users.uj.edu.pl/~ufkamys/BK/smop1.htm*

[7] *http://www.1pf.if.uj.edu.pl/materialy/analiza-niepewnosci-pomiarowych*

[8] *http://www.fis.agh.edu.pl/~pracownia_fizyczna/index.php?p=pomoce*

[9] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki,* Wydawnictwo Naukowe PWN, W-wa 2003.

[10] *http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html*

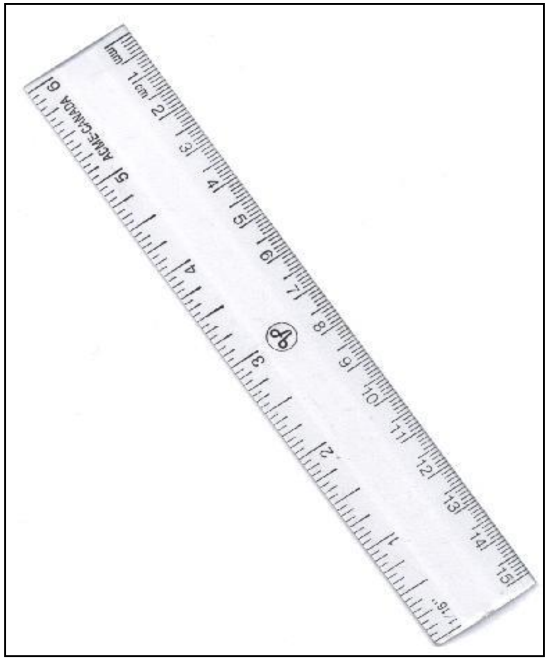
Rodzaje pomiarów

Pomiar bezpośredni

pomiar, w którym konkretna wielkość fizyczna mierzona jest bezpośrednio przy pomocy określonego przyrządu.

Przykłady:

- pomiar długości linijką
- pomiar czasu stoperem
- Pomiar masy za pomocą wagi



Rodzaje pomiarów

Pomiar pośredni

pomiar, w którym konkretna wielkość fizyczna mierzona jest pośrednio poprzez pomiar bezpośredni innych wielkości fizycznych przy pomocy określonego przyrządu.

Przykłady:
- pomiar prędkości (mierzymy czas i odległość)
- pomiar objętości (poszczególne wymiary)
- pomiar masy (poszczególne wymiary i zanana gęstość)

Dokładność pomiarów

Każdy pomiar obarczony jest niepewnością pomiarową i ma skończoną dokładność!

Przykłady:
- dokładność przyrządów pomiarowych
- ograniczenia naszych zmysłów
- czynniki fizyczne: szumy, zakłócenia

Wynik pomiaru bez podania niepewności pomiarowej jest bezużyteczny i może prowadzić do błędnych wniosków!

Zapis wyniku pomiaru

Podając **wynik pomiaru** należy podać:

wartość wielkości mierzonej, niepewność pomiarową i jednostkę

!!! wszystkie trzy !!!

d=3,06(35) mm **d=(3,06±0,35) mm** **d=(3,06±0,35)*10^{-3} m**

d=3,06 mm, *u*(d)=0,35 mm

- podajemy najwyżej dwie cyfry znaczące niepewności
- niepewność zaokrąglamy zawsze w górę
- wynik zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego do którego zaokrąglono niepewność
- stosujemy przedrostki lub notację potęgową

Zapis wyniku pomiaru

Przykład:

notatki $\bar{g} = 9.8145467\,\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.21434\,\frac{m}{s^2}$

sprawozdanie $\bar{g} = 9.81\,\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22\,\frac{m}{s^2}$

źle

$$\bar{g} = 9.814\,\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22\,\frac{m}{s^2}$$

$$\bar{g} = 9.81\,\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.214\,\frac{m}{s^2}$$

Niepewność względna i bezwzględna

- Niepewność bezwzględna

$$\boldsymbol{d} \pm \boldsymbol{u}(\boldsymbol{d})$$

d=3,06(35) mm

- Niepewność względna

$$\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{d})}{|\boldsymbol{d}|}$$

$$\frac{\boldsymbol{u}(\mathbf{d})}{|\mathbf{d}|}=\mathbf{0{,}12}$$

- Niepewność procentowa

$$\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{d})}{|\boldsymbol{d}|} \cdot \mathbf{100\%}$$

d=3,06mm ± 12%

Błąd pomiaru

Błąd pomiaru:

- jakościowo – fakt, że wynik pomiaru różni się od wartości rzeczywistej
- ilościowo - różnica pomiędzy wartością zmierzoną x_i, a wartością rzeczywistą x_0, $|x_i - x_0|$

Rodzaje błędów pomiarowych:

- **Błędy przypadkowe –** w pomiarze powtarzanym zmienia się w sposób nieprzewidywalny powodowane przez wiele niezależnych przyczyn o porównywalnym wpływie na wynik lub przez sam charakter badanego procesu/zjawiska
- **Błędy systematyczne –** w pomiarze powtarzanym pozostaje stały lub zmienia się w sposób przewidywalny, powodowana przez skończoną dokładność przyrządów pomiarowych lub przez systematyczny błąd urządzenia mierzącego
- **Błędy grube –** drastyczna różnica pomiędzy pomiarem a wartością prawdziwą, wynika z błędu w czasie pomiaru (eksperymentator lub przyrząd)

Niepewność pomiarowa

- *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement"* - Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) z inicjatywy Międzynarodowego Komitetu Miar (CIPM) -1995r.
- *„Wyrażanie niepewności pomiaru. Przewodnik"* - Główny Urząd Miar – 1999r.

Niepewność pomiaru:

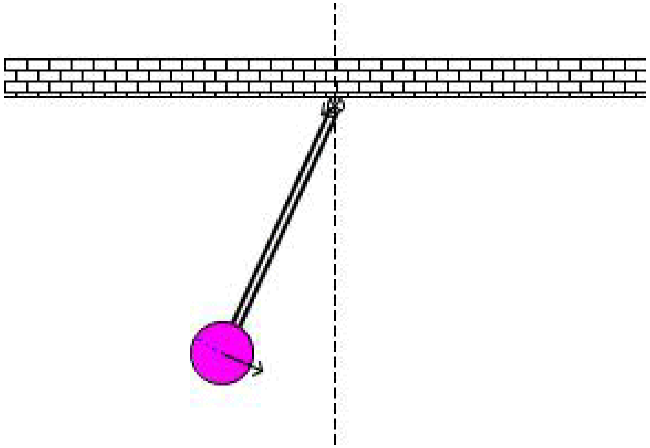
Parametr związany z rezultatem pomiaru, chrakteryzujący rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej

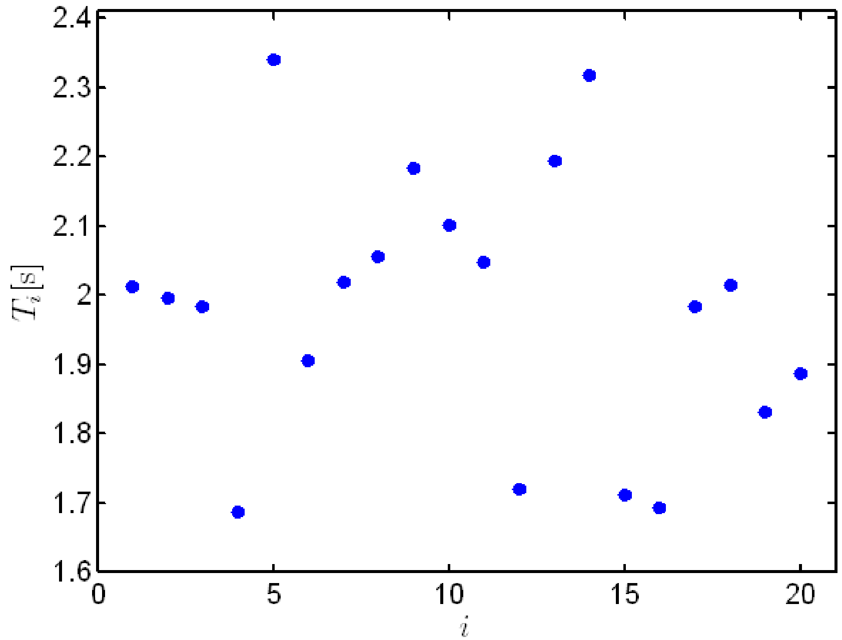
Metody wyznaczania niepewności:

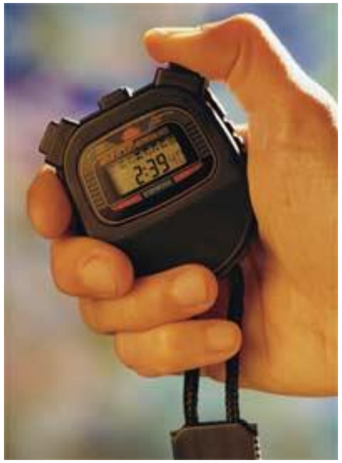
- metoda **typu A** wynika z **analizy statystycznej** serii pomiarów, stosujemy do oceny błędów przypadkowych – niepewność przypadkowa/statystyczna
- metoda **typu B** wykorzystuje metody inne niż analiza statystyczna (analiza serii obserwacji), stosujemy do oceny błędów systematycznych i pojedynczych pomiarów – niepewność systematyczna

Błędy przypadkowe

Pomiar okresu drgań wahadła za pomocą stopera







Dokładność pomiaru stopera – 0.01s

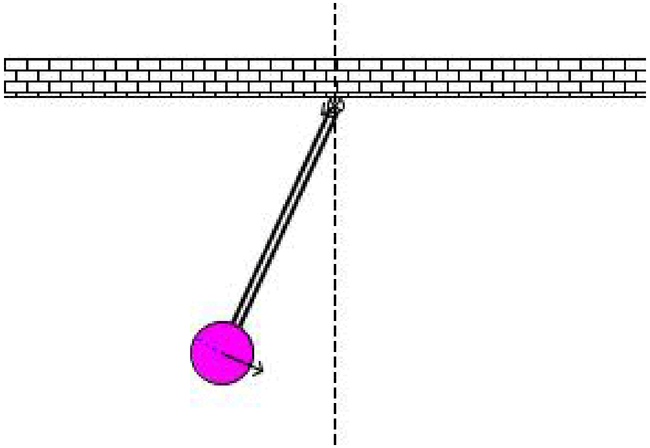
Czas reakcji człowieka – 0.2s

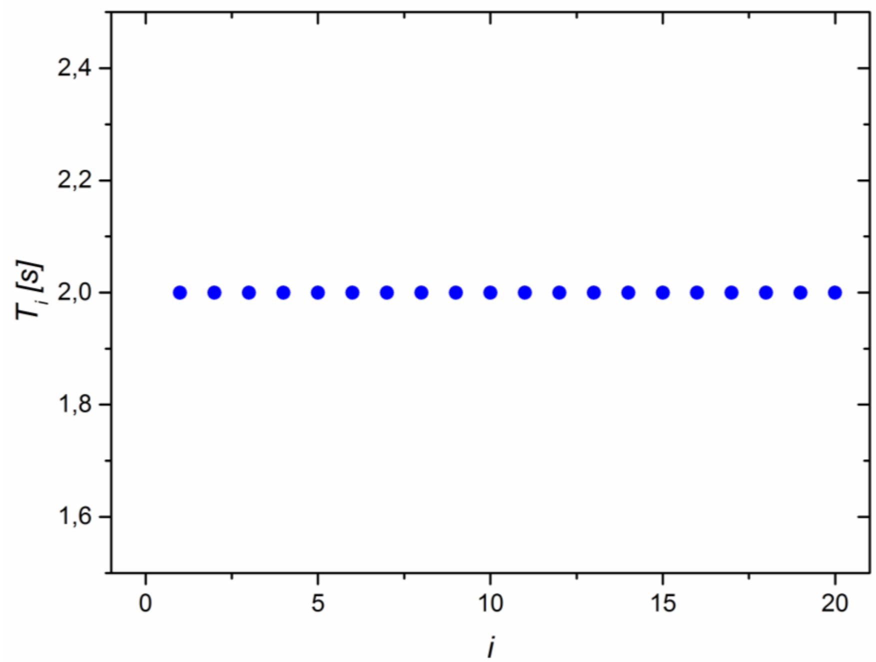
ma charakter przypadkowy!

Dominują błędy przypadkowe – ocena niepewności metodą typu A

Błędy systematyczne

Pomiar okresu drgań wahadła za pomocą zegarka





Dokładność pomiaru zegarka – 1s

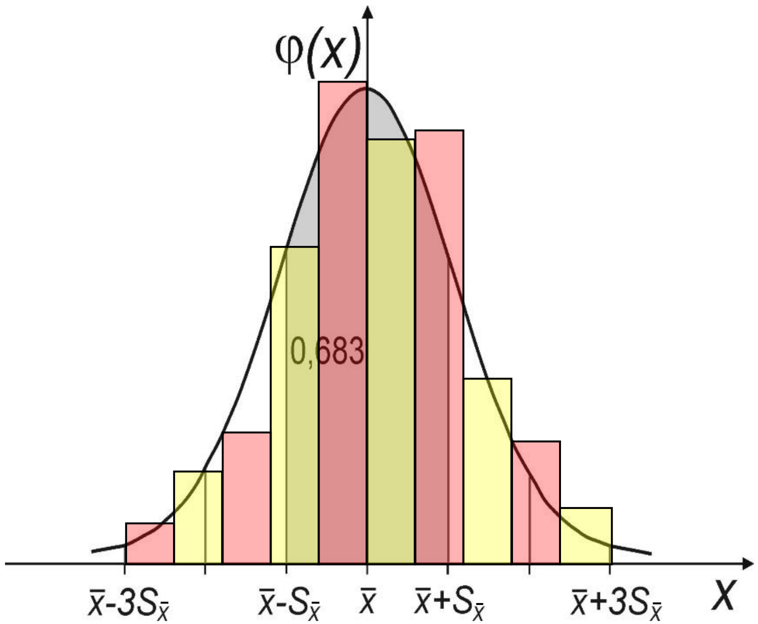
Czas reakcji człowieka – 0.2s

ma charakter przypadkowy!

Dominują błędy systematyczne – ocena niepewności metodą typu B

Należy zawsze zapisać dokładność przyrządu!

Typ A – statystyczna analiza danych pomiarowych



Dla niepewności przypadkowych rozkład wielkości mierzonych i (błędów przypadkowych) dany jest **rozkładem Gaussa**

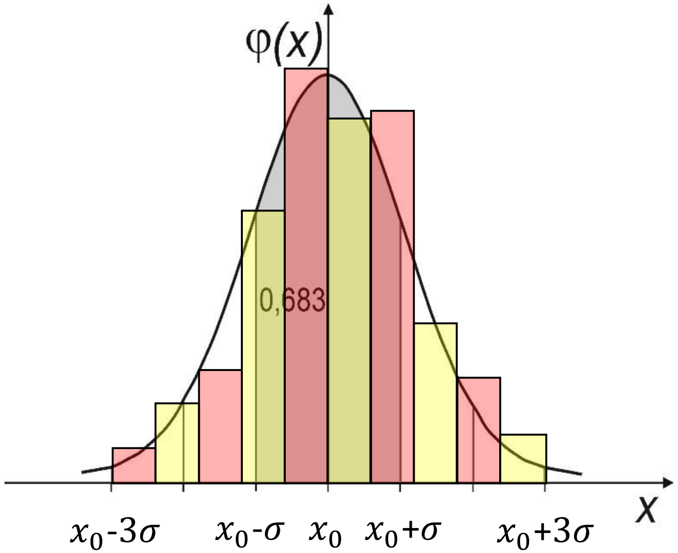
Rozkład prawdopodobieństwa – dla zmiennych dyskretnych

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa – dla zmiennych ciągłych. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$

Estymacja – wnioskowanie na podstawie próby (skończonego zespołu doświadczeń) o własnościach nieskończonego zespołu wszystkich możliwych doświadczeń

Estymator – statystyka (funkcja zmiennych losowych obserwowanych w próbie) służąca do szacowania wartości parametru (wartość oczekiwana, odchylenie standardowe) rozkładu.

Konwencja GUM – należy podawać niepewność standardową *u* wyniku pomiaru (niepewność wyrażoną w formie odchylenia standardowego)

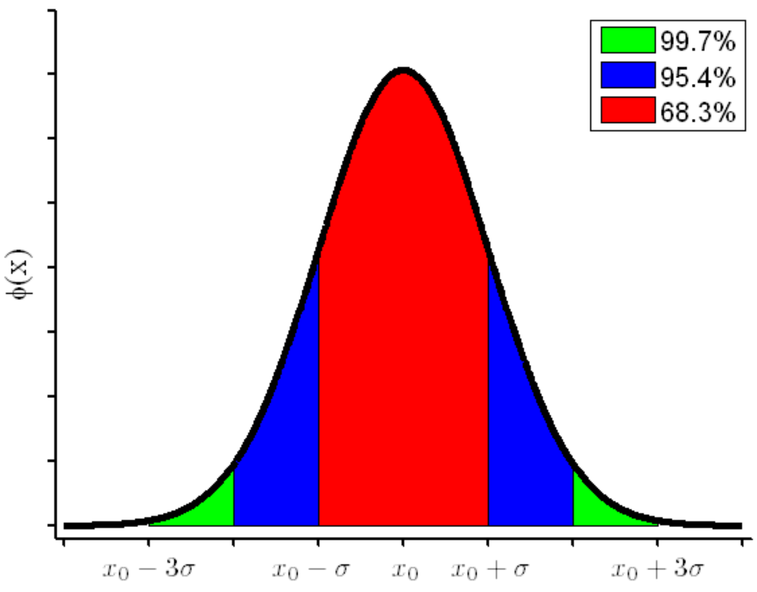


$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_0)^2/2\sigma^2}$$

x – *wartość mierzona*

x_0 – *wartość oczekiwana, położenie maksimum funkcji* $\varphi(x)$

σ – *odchylenie standardowe, miara szerokości rokładu*



Prawdziwa wartość mierzonej wielkości utożsamiana jest z wartością oczekiwaną.

W przedziale $(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma)$ mieści się **68,3%** wszystkich wyników.

W przedziale $(x_0 - 3\sigma, x_0 + 3\sigma)$ mieści się **99,7%** wszystkich wyników.

Typ A – statystyczna analiza danych pomiarowych

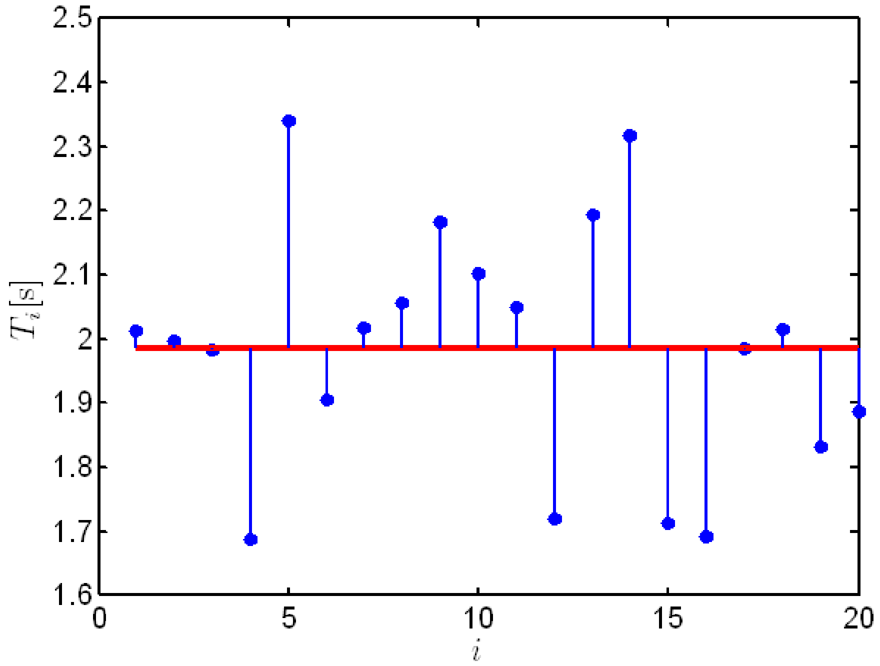
Dla skończonej liczby pomiarów estymujemy parametry rozkładu – wyliczamy wartości estymatora.

Estymator wartości oczekiwanej – średnia arytmetyczna:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Estymator odchylenia standardowego (pojedynczego pomiaru):

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

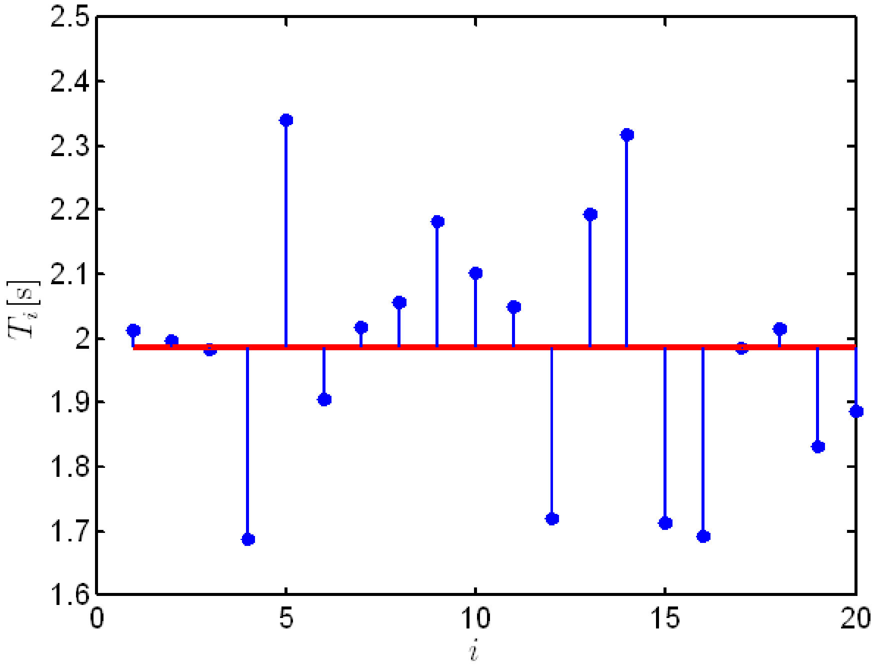


Typ A – statystyczna analiza danych pomiarowych

Estymator odchylenia standardowego średniej:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$



$S_{\bar{x}}$ - określa niepewność wyniku pomiaru, można je zmniejszyć zwiększając liczbę pomiarów n!

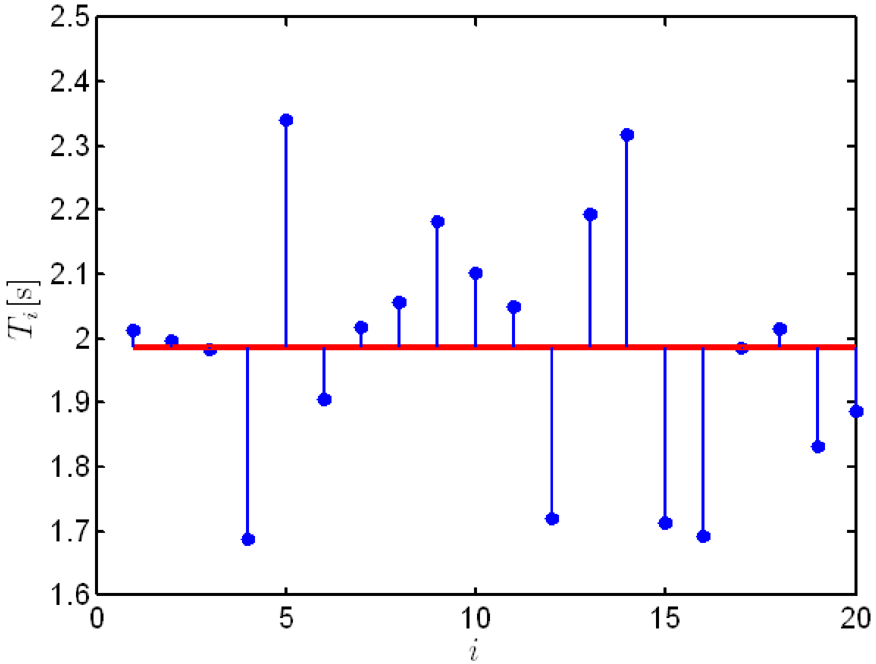
S_x - określa niepewność pojedynczego pomiaru, mówi o dokładności metody

Typ A – statystyczna analiza danych pomiarowych

Estymator odchylenia standardowego średniej:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n \cdot (n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$



$S_{\bar{x}}$ - określa niepewność wyniku pomiaru, można je zmniejszyć zwiększając liczbę pomiarów n!

S_x - określa niepewność pojedynczego pomiaru, mówi o dokładności metody

Poziom ufności a zapis wyniku

Poziom ufności α – prawdopodobieństwo z jakim wyznaczony przedział zawiera rzeczywistą wartość mierzonej wielkości.

u – niepewność standardowa, α=0.683

ZAPIS : d=3,06(35)mm !

$(\bar{x} - u, \bar{x} + u)$ Wartość rzeczywista mierzonej wartości mieści się w tym przedziale z prawdopodobieństwem 0.683.

*U=k*u – niepewność rozszerzona*

ZAPIS : d=3,06±0,35 mm !

k=2, α=0.95

$(\bar{x} - 2 * u, \bar{x} + 2 * u)$ Wartość rzeczywista mierzonej wartości mieści się w tym przedziale z prawdopodobieństwem 0.95.

k=3, α=0.99

$(\bar{x} - 3 * u, \bar{x} + 3 * u)$ Wartość rzeczywista mierzonej wartości mieści się w tym przedziale z prawdopodobieństwem 0.99.

Typ A – mała seria pomiarowa

Dla małych serii pomiarowych $n \leq 10$ wartość $S_{\overline{x}}$ daje zaniżoną wartość niepewności pomiarowej!

Aby zachować dany poziom ufności $\boldsymbol{\alpha}$ stosujemy współczynnik studenta $\boldsymbol{t_{\alpha,n}}$:

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\overline{x}} \rightarrow t_{\alpha,n} \cdot S_{\overline{x}}}}$$

n	α=0.6828	α=0.95	α=0.99
2	1.837	12.706	63.657
3	1.321	4.303	9.926
4	1.197	3.182	5.841
5	1.141	2.776	4.604
6	1.11	2.58	4.032
7	1.09	2.447	3.707
8	1.077	2.365	3.5
9	1.066	2.306	3.355
10	1.059	2.252	3.25

Ocena niepewności typu B

Niepewność maksymalna (niepewność graniczna) Δx

- **wszystkie wyniki pomiarów są zawarte w przedziale** $(\boldsymbol{x} - \Delta \boldsymbol{x}; \boldsymbol{x} + \Delta \boldsymbol{x})$

- Odczyt ze skali - Δx = „najmniejsza podziałka”
- Pomiar za pomocą mierników analogowych - $\Delta x = \frac{klasa \cdot zakres}{100}$

Zamiana niepewności granicznej na niepewność standardową:

$$\boxed{u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}}}$$

Odchylenie standardowe dla rozkładu jednostajnego

Niepewność całkowita

- Podanie obu rodzajów niepewności niezależnie

$$x = \bar{x} \pm S_{\bar{x}} \pm \Delta x \; [jednostka]$$

- **Podanie całkowitej niepewności standardowej**

$$\boxed{u(\bar{x}) = \sqrt{{S_{\bar{x}}}^2 + \frac{\Delta x^2}{3}}}$$

- Podanie całkowitej niepewności maksymalnej

$$\boxed{\Delta\bar{x} = 3 \cdot S_{\bar{x}} + \Delta x}$$

<u>W sprawozdaniu należy podać w jaki sposób obliczono niepewności:</u>

- **Ocena niepewności typu A/B – błędy statystyczne/systematyczne**
- **Niepewność standardowa/maksymalna**
- **Poziom ufności**

Porównywanie wyników

- Zgodność z wartością tablicową x_0

$$\boxed{|\bar{x} - x_0| < k \cdot u(\bar{x})}$$

$u\ dla\ \alpha = 0.68; \mathrm{k} = 2 \text{ lub } 3$

- Porównanie dwóch wartości zmierzonych

$$\boxed{|\overline{x_A} - \overline{x_B}| = k \cdot \sqrt{u(\overline{x_A})^2 + u(\overline{x_B})^2}}$$

Średnia ważona

Średnią ważoną stosujemy gdy mamy kilka pomiarów tej samej wielkości.

Mamy wartości średnie $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}$ i niepewności $\mathrm{u}(\overline{x_1}), \mathrm{u}(\overline{x_2}), \ldots, \mathrm{u}(\overline{x_n})$

Definiujemy wagi w_i: $$w_i = \frac{1}{u(\overline{x_i})^2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i}}$$

Najpierw trzeba sprawdzić zgodność wyników (!)

[zob. Taylor]

Np. mogę uśrednić pomiary

$\bar{x}_A$ = 112(3) i $\bar{x}_B$ = 108(5)

czy nawet

$\bar{x}_A$ = 112(3) i $\bar{x}_B$ = 135(5)

ale dla

$\bar{x}_A$ = 112(3) i $\bar{x}_B$ = 68(5)

jest problem.

Niepewność w pomiarach pośrednich – propagacja niepewności

- W pomiarach pośrednich **znamy funkcje** opisujące związek pomiędzy poszukiwaną wielkością *z* i mierzonymi bezpośrednio wielkościami x_1, x_2, … x_n

$$\boxed{z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

- **Wartość oczekiwana** tej wielkości jest funkcją wartości oczekiwanych poszczególnych zmiennych

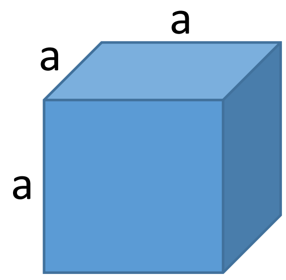
$$\boxed{\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}$$

I. Pomiar objętości sześcianu

$$V = a^3$$

$$\bar{V} = \bar{a}^3$$

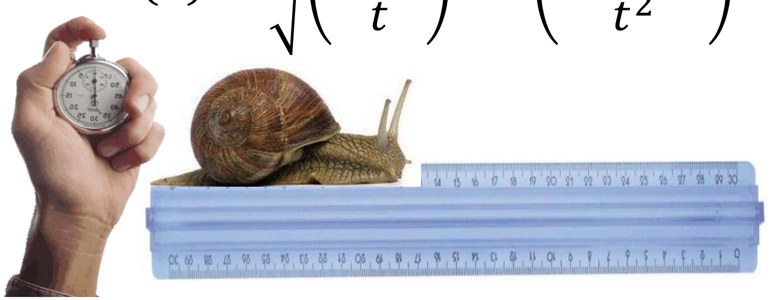
$$u(\bar{V}) = 3a^2 \cdot u(\bar{a})$$



II. Pomiar średniej prędkości

$$v = \frac{s}{t} \qquad \bar{v} = \frac{\bar{s}}{\bar{t}}$$

$$u(\bar{v}) = \sqrt{\left(\frac{u(\bar{s})}{\bar{t}}\right)^2 + \left(\frac{s \cdot u(\bar{t})}{\bar{t}^2}\right)^2}$$



Niepewność w pomiarach pośrednich – propagacja niepewności

- **Niepewność standardowa** tej wielkości jest funkcją niepewności standardowych poszczególnych zmiennych

$$u(\bar{z}) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot u(\overline{x_1})\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot u(\overline{x_2})\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot u(\overline{x_n})\right)^2}$$

- Gdy obliczamy niepewność maksymalną (graniczną) można stosować „metodę różniczki zupełniej”

$$\Delta\bar{z} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta\overline{x_1}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta\overline{x_2}\right| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \Delta\overline{x_n}\right|$$

Propagacja niepewności - przykłady

- **Stała a**

$$z = a \cdot x \qquad \boxed{u(z) = a \cdot u(x)}$$

- **Suma i różnica**

$$z = x \pm y \qquad \boxed{u(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2}}$$

- **Iloczyn i iloraz**

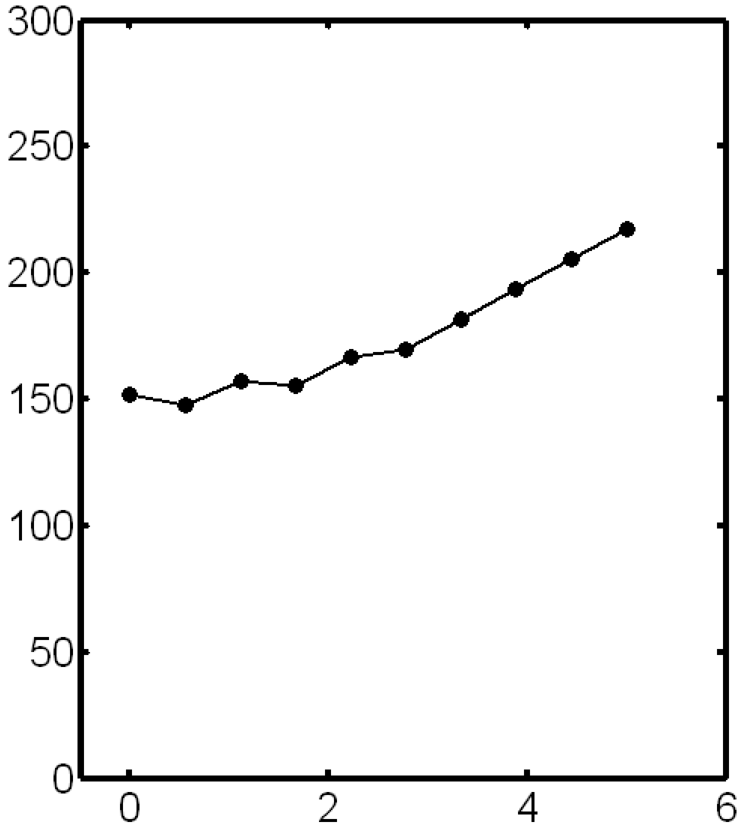
$$z = x \cdot y \qquad u(z) = \sqrt{(y \cdot u(x))^2 + (x \cdot u(y))^2}$$

$$z = \frac{x}{y} \qquad u(z) = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{y}\right)^2 + \left(\frac{x \cdot u(y)}{y^2}\right)^2}$$

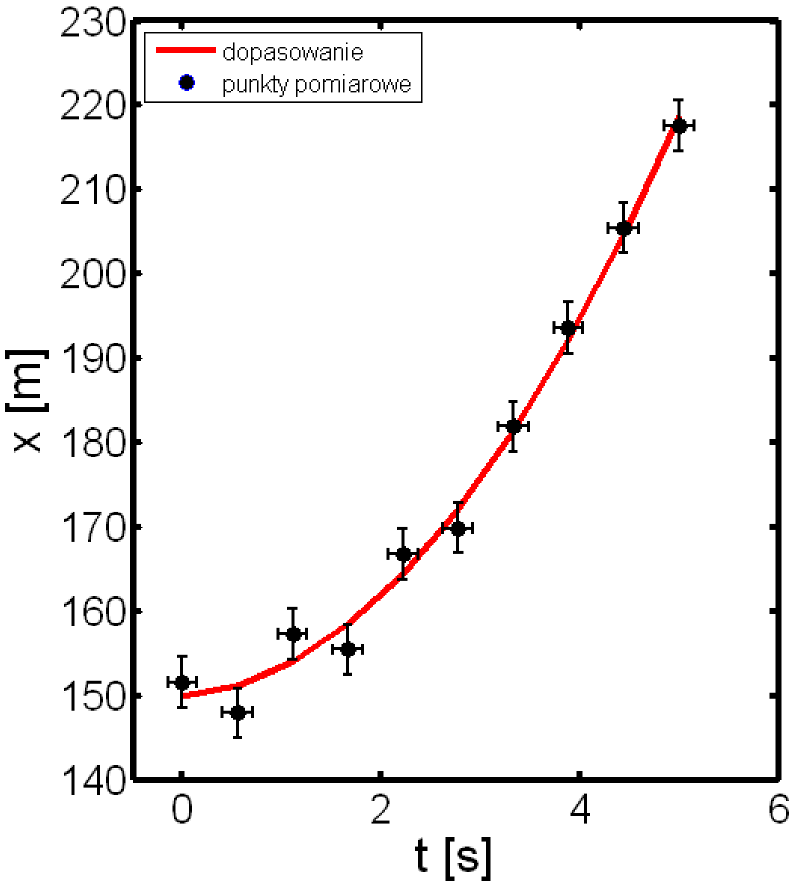
$$\boxed{\frac{u(z)}{z} = \sqrt{\left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\frac{u(y)}{y}\right)^2}}$$

Prezentacja wyników na wykresie

ŹLE!

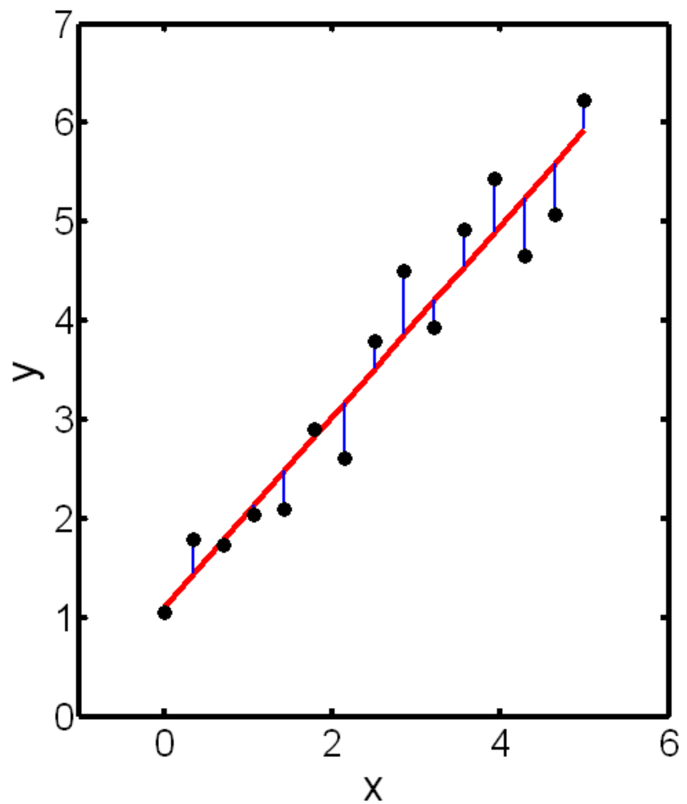


DOBRZE!



Regresja liniowa

Dopasowanie prostej $y = a \cdot x + b$ do zbioru punktów doświadczalnych (x_i, y_i) i znalezienie parametrów a i b oraz ich niepewności $u(a)$ i $u(b)$.



Metoda najmniejszych kawadratów

Tak dobieramy parametry a i b, aby zminimalizować sumę kwadratów odchyleń współrzędnych y punktu pomiarowego i odpowiadającego mu punktu na dopasowanej prostej

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - y(x_i))^2}{u(y_i)^2} = min$$

Dla jednakowych $u(y_i)$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a \cdot x_i + b)\right)^2 = min$$

Współczynnik korelacji r

$$|r| \leq 1$$

Im bliższy 1 tym lepsze dopasowanie!

Regresja liniowa

Przypadek szczególny:

- Zmienna x jest zmienną kontrolowaną (ma zaniedbywalnie małą niepewność)
- Zmienna y ma niepewność taką samą dla wszystkich punktów $u(y)$

$$\bar{a} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = n\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\Delta}$$

$$u(\bar{a}) = \sigma(y)\sqrt{\frac{n}{\Delta}}$$

$$\sigma(y) = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - b - a \cdot x_i)^2}$$

$$u(\bar{b}) = \sigma(y)\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{\Delta}}$$

Regresja liniowa

- Jeżeli wartości $u(y_i)$ są różne dla poszczególnych punktów pomiarowych stosujemy metodę najmniejszych kwadratów uwzględniającą wagi statystyczne $w_i = 1/{u_i}^2$

- Liniowa metoda najmniejszych kwadratów może być również wykorzystana do dopasowania wielomianów

- Część nie liniowych zależności funkcyjnych możemy sprowadzić do funkcji liniowej:

$$U(t) = U_0 \cdot \exp(-t/\tau) \longrightarrow \ln(U) = ln(U_0) - t/\tau$$

Za zgodą Autorów wykorzystane zostały elementy prezentacji dr Teresy Jaworskiej-Gołąb, prof. Marka Stankiewicza i dr. hab. Jacka Zejmy