

# I Pracownia Fizyczna

## BIOMIK

poniedziałek, 8:30-11:15

# Prowadzący & kalendarz

**dr hab. Joanna Raczkowska – tutor**

*joanna.raczkowska@uj.edu.pl*

prof. dr hab. Andrzej Budkowski

dr hab. Leszek Józefowski

dr Magdalena Skurzok

mgr Szymon Parzych

mgr Yana Shymborska

*mgr Svitlana Tymetska*

*mgr Anna Cichy*

Janusz Konarski

Andrzej Barecki

lp	data		ćwiczenie
1.	9 X	Zebrańie organizacyjne	0
2.	16 X		1
3.	23 X		2
4.	30 X	Dzień Wolny	
5.	6 XI		3
6.	13 XI		4
7.	20 XI		5
8.	27 XI		6
9.	4 XII	Pracownia buforowa	7
10.	11 XII	Pracownia buforowa	8
11.	18 XII		
12.	25 XII	Dzień Wolny	
13.	1 I	Dzień Wolny	
14.	8 I		
15.	15 I		
16.	22 I	Ostateczny termin zaliczenia sprawozdań	
17.	29 I	Sesja egzaminacyjna	

Przed pierwszymi zajęciami – obowiązkowa ankieta, z potwierdzeniem zapoznania się z regułami obowiązującymi na IPF:

- Ogłoszenie Kierownika IPF UJ
- Regulamin BHP
- Regulamin IPF UJ
- Wymagania etyczno-moralne

# Wszystkie informacje – strona IPF

I Pracownia Fizyczna

**BHP**  
**regulamin IPF**

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

INFORMACJE ORGANIZACYJNE ▾ TABLICA OGŁOSZEŃ ▾ MATERIAŁY DO ĆWICZEŃ ▾ DLA SZKÓŁ ▾



## I PRACOWNIA FIZYCZNA

I PRACOWNIA FIZYCZNA

**Zobacz również**

- [Uniwersytet Jagielloński](#)
- [Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej](#)
- [Instytut Fizyki UJ](#)
- [USOSweb](#)
- [Pracownicy IPF](#)
- [Asystenci IPF](#)
- [Ogród doświadczeń](#)
- [Muzeum Inżynierii Miejskiej](#)
- [Małopolski Komitet Oregowy Olimpiady Fizycznej](#)

**OGŁOSZENIA BIEŻĄCE. UWAGA, WAŻNE INFORMACJE!**

WIĘCEJ

**SPIS ĆWICZEŃ**

WIĘCEJ

**MATERIAŁY DLA GRUP ĆWICZENIOWYCH - SEMESTR ZIMOWY 2021/2022**

WIĘCEJ

**CZĘSTO ZADAWANE PYTANIA**

WIĘCEJ

BIOFIZYKA (WFAIS) >

BIOMIK (WBBB) >

ZMIN >

FIZYKA A >

FIZYKA B >

CHEMIA ZRÓWNOWAŻONEGO  
ROZWOJU >

FIZYKA DLA FIRM >



FACEBOOK

## BIOMIK (WBBB) - dr hab. Joanna Raczkowska prof. UJ

Przydział ćwiczeń dla asystentów w semestrze zimowym 2023/2024 - *pdf*.

Przydział ćwiczeń dla studentów kierunku BIOFIZYKA MOLEKULARNA I KOMÓRKOWA (BIOMIK)  
w semestrze zimowym 2023/2024 - *pdf*.

Lista wykonywanych ćwiczeń:

[C1 Cechowanie termopary i termistora.](#)

[C4 Wyznaczanie ciepła topnienia lodu.](#)

[E11 Wyznaczanie pojemności kondensatora i zgromadzonego na nim ładunku metodą rozładowania.](#)

[M16 Pomiar współczynnika lepkości cieczy metodą Stokesa.](#)

[O2 Wyznaczanie ogniskowej oraz badanie wad soczewek przy użyciu ławy optycznej.](#)

[O7 Badanie skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła w wodnych roztworach sacharozy za pomocą polarymetru Laurent'a.](#)

[O10 Badanie widm emisyjnych za pomocą spektroskopu przyzmatycznego.](#)

Materiały pomocnicze:

*"Podstawy opracowania wyników pomiarów z elementami analizy niepewności pomiarowych"* -

wykład Tutora.

Inne:

[Wymagania etyczno-moralne stawiane studentom](#)

# Przebieg ćwiczenia

Do Pracowni należy przyjść punktualnie. Kurtki i duże torby należy zostawić w szatni.

Należy posiadać:

- zeszyt laboratoryjny,
- plan pracy na piśmie,
- stronę administracyjną wykonywanego ćwiczenia (do ściągnięcia ze strony IPF).

Dopuszczenie do wykonywania ćwiczenia na podstawie (pisemnego) kolokwium (10-15 min.)

Przygotowanie stanowiska do wykonania pomiarów, w tym wypożyczenie wyposażenia dodatkowego np. suwmiarka, stoper, mierniki uniwersalne...

**urządzenia elektryczne i zbudowane własnoręcznie obwody elektryczne  
student włącza do sieci tylko w obecności i za zgodą asystenta**

Przystąpienie do wykonania pomiarów.

Wyniki pomiarów należy zapisywać w zeszycie laboratoryjnym.

Opuszczenie terenu Pracowni w czasie trwania zajęć jest dozwolone tylko za zgodą asystenta

Po zakończeniu pomiarów należy:

- oddać wypożyczone przyrządy,
- uporządkować stanowisko pracy,
- **uzyskać podpis asystenta pod protokołem pomiarowym.**

# Sprawozdanie

## Sprawozdanie powinno zawierać:

1. stronę administracyjną (strona ta nie należy merytorycznie do sprawozdania, jednak w istotny sposób usprawnia administrowanie obiegiem sprawozdania; należy rozpocząć jej wypełnianie jeszcze przed rozpoczęciem wykonywania ćwiczenia)
2. część wstępną prezentującą w zwięzły i logiczny sposób niezbędną teorię, cel ćwiczenia i metodę pomiarową (nie więcej niż 1.5 strony)
3. protokoły przebiegu ćwiczenia (protokoły pomiarowe lub ich kopie, np. kopie odpowiednich stron zeszytu pomiarowego)
4. wszystkie etapy opracowania danych oraz ilościowej analizy niepewności pomiarowych, przedstawione w sposób umożliwiający osobie oceniającej sprawozdanie sprawdzenie ich poprawności; wykresy i tabele powinny być ponumerowane i podpisane, powinny być do nich odsyłacze w tekście
5. podsumowanie i dyskusję uzyskanych wyników, w tym porównanie uzyskanych rezultatów z przewidywaniami lub z dostępnymi danymi literaturowymi (należy podać źródła cytowań)
6. bibliografię (ponumerowane adresy wszystkich cytowań (zarówno „papierowych” jak i internetowych) w następującej formie:

[1] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 3, Wydawnictwo Naukowe PWN, W-wa 2006, str. 102-107.

[2] T. Figielski, *Wiedza i życie* 4 (2007) 62.

[3] [http://pl.wikipedia.org/wiki/Butelka\\_lejdejska](http://pl.wikipedia.org/wiki/Butelka_lejdejska)

Strona tytułowa dostępna na stronie IPF!

## PLAGIAT

Żadna część sprawozdania nie może być kopią dostępnych dokumentów (publikacje, książki, Internet); Jeśli pojawi się absolutna konieczność skopiowania np. grafiki, należy obowiązkowo podać pełny odnośnik do źródła.

# Zaliczenia

## Zaliczenie ćwiczenia:

- Wykonanie ćwiczenia
- Oddanie sprawozdania – w formacie pdf (*Nazwisko\_symbol.pdf*), na adres asystenta prowadzącego ćwiczenie, w ciągu **tygodnia** od jego wykonania
- Max. 2 spóźnienia (każde – 0.5 oceny)
- 3 spóźnienie – brak zaliczenia ćwiczenia (ocena 0.0)
- Poprawa zgodnie z uwagami asystenta (w razie kłopotów – konsultacje) w ciągu tygodnia
- W przypadku nie oddania poprawy po 2 tygodniach asystent wpisuje ocenę na podstawie wersji pierwotnej sprawozdania (nawet jeśli jest to 2.0)
- Ocena za ćwiczenie uwzględnia kolokwium, pracę laboratoryjną oraz sprawozdanie.

## Zaliczenie IPF:

- Średnia arytmetyczna wszystkich ocen (z uwzględnieniem spóźnień);
- Aby zaliczyć IPF średnia musi być wyższa niż 3.0!

# Podstawy analizy niepewności pomiarowych (I Pracownia Fizyki)

**Autor: dr hab. Piotr Cyganik**



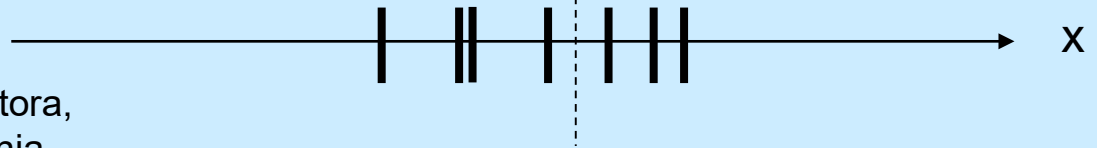
# Co to jest błąd pomiarowy?

wynik pomiaru      wartość prawdziwa

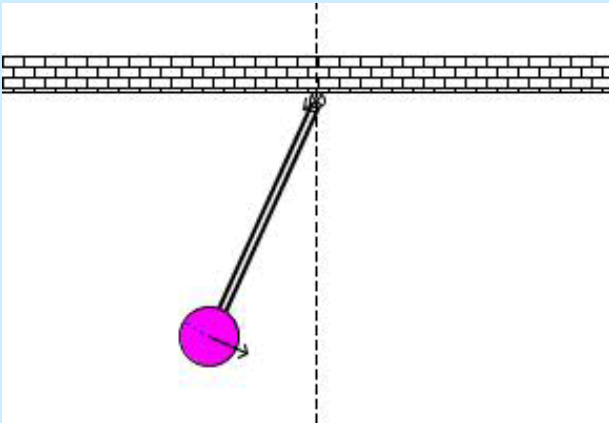
$$\text{Błąd pomiarowy} = x_i - x_0$$

## a) błąd przypadkowy

nie skorelowane błędy eksperymentatora,  
szумы układu pomiarowego, zakłócenia



Przykład: Pomiar okresu drgań wahadła za pomocą stopera



Dokładność pomiaru stopera  
0.01 s

Czas reakcji człowieka  
~0.2 s  
(ma charakter przypadkowy)

# Co to jest błąd pomiarowy?

wynik pomiaru      wartość prawdziwa

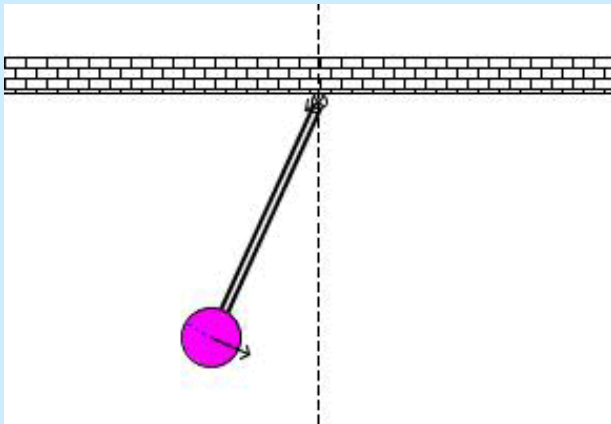
$$\text{Błąd pomiarowy} = x_i - x_0$$

## b) błąd systematyczny

Systematyczna różnica pomiędzy kolejnymi pomiarami a wartością prawdziwą



Przykład: Pomiar okresu drgań wahadła za pomocą sekundnika



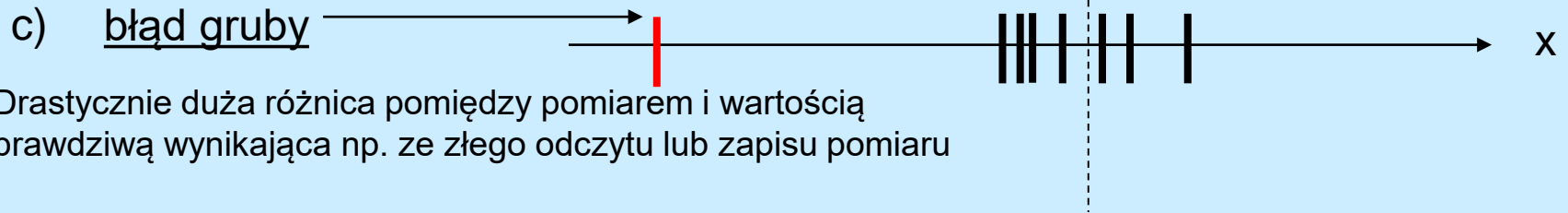
Dokładność pomiaru sekundnika  
1 s  
(mała dokładność podziałki czasu  
da wyraźne i systematyczne przesunięcie  
wyniku w stosunku do wartości prawdziwej)

Czas reakcji człowieka  
~0.2 s

# Co to jest błąd pomiarowy?

wynik pomiaru      wartość prawdziwa

$$\text{Błąd pomiarowy} = x_i - x_0$$



Przykład: Pomiar czasu za pomocą stopera



Odczyt 239 s. zamiast 2 min. 39 s.

# Co to jest niepewność pomiaru ?

„Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik”. Warszawa, Główny Urząd Miar 1999.

*Niepewność pomiaru jest związanym z rezultatem pomiaru parametrem, charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej.*

Mamy dwa generalne podejścia do oceny niepewności pomiarowych

## TYP A

### Podejście statystyczne

statystyczna analiza danych pomiarowych stosujemy do błędów przypadkowych i odpowiednio dużej liczby pomiarów

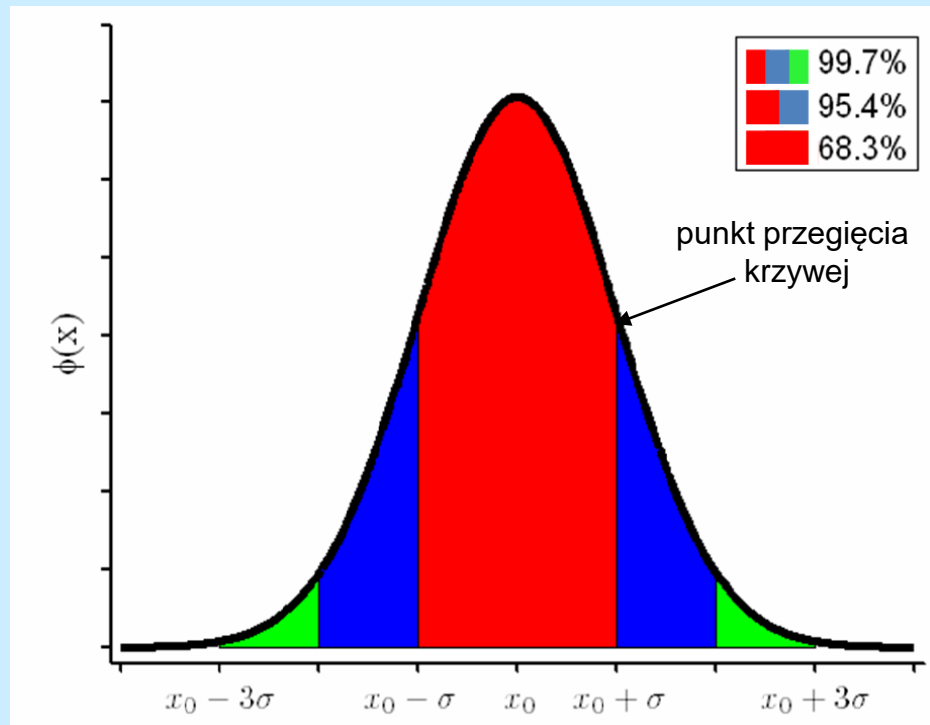
## TYP B

### Podejście deterministyczne

w przypadku braku możliwości statystycznej analizy danych wykonujemy pewne oszacowanie - stosujemy do błędów systematycznych i pojedynczych pomiarów

# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Niepewności przypadkowe opisane są rozkładem prawdopodobieństwa typu Gaussa (normalnym).



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

to jest rozkład w postaci unormowanej

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$$

$x$  – wartość mierzona

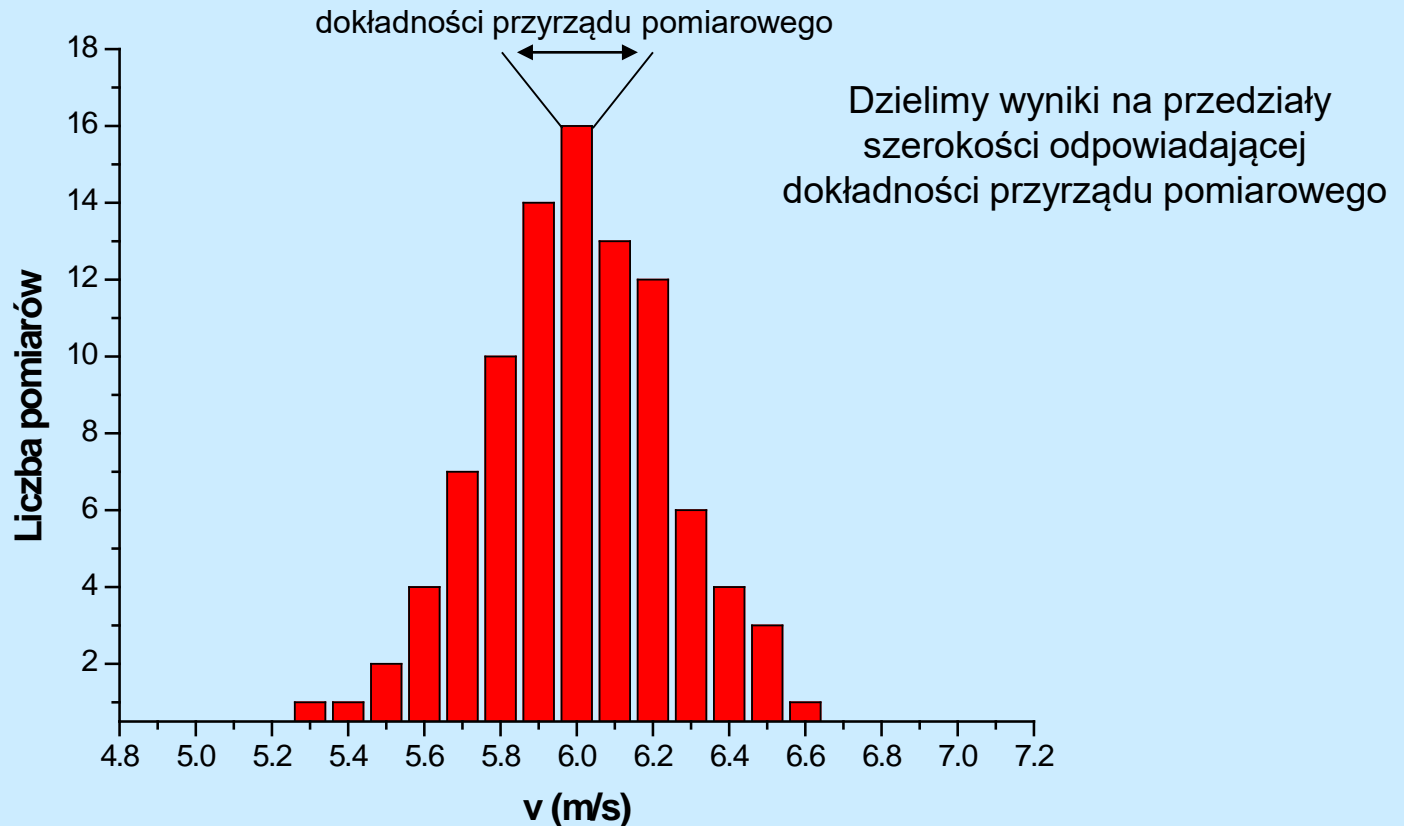
$x_0$  – wartość oczekiwana

$\sigma$  – odchylenie standardowe  
(miara niepewności pojedynczego pomiaru)

Ponieważ w praktyce laboratoryjnej wykonujemy zawsze skończoną liczbę pomiarów to parametry rozkładu Gaussa możemy jedynie estymować !

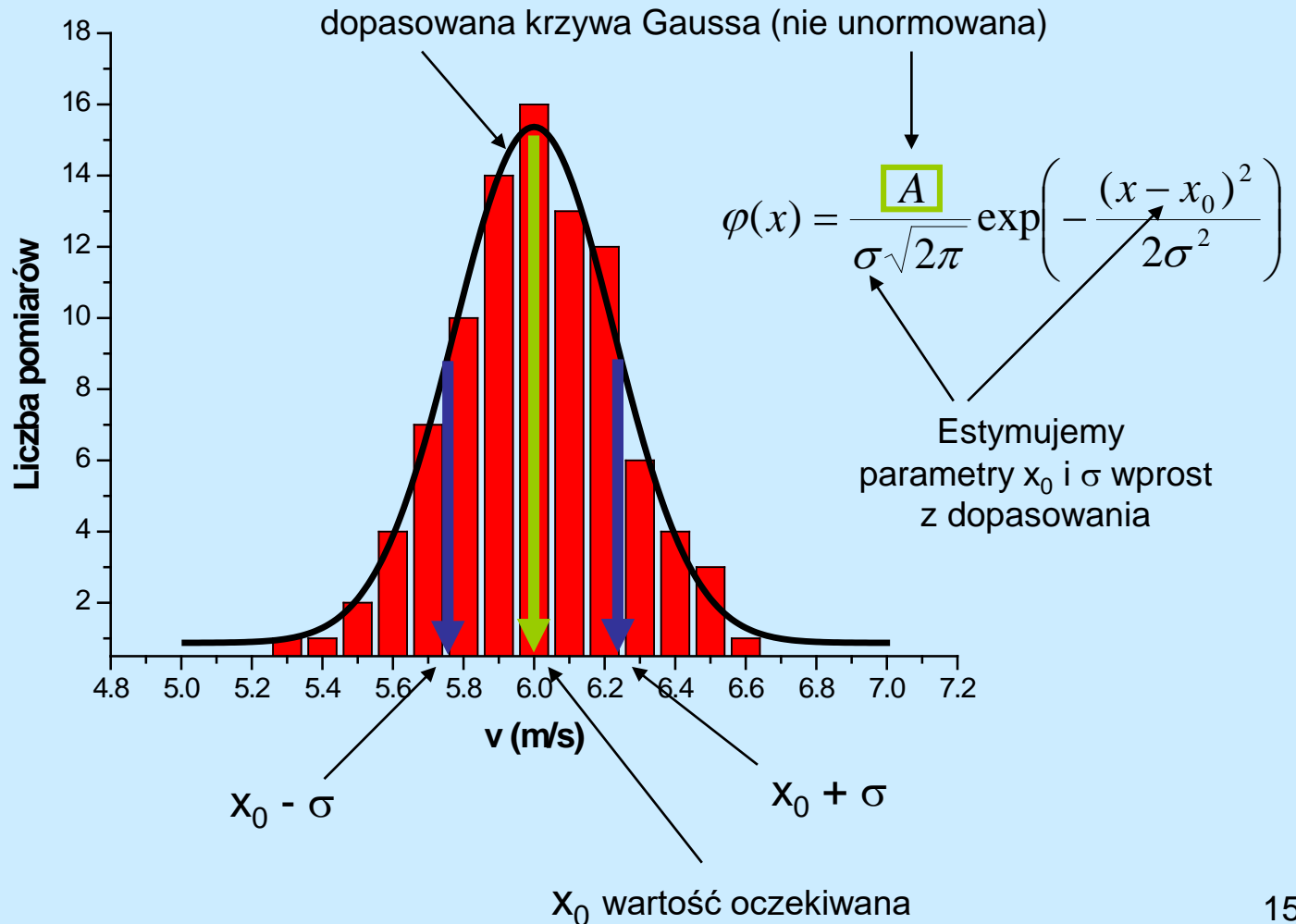
# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Przykład: analiza 94 wyników (duża statystyka!) pomiaru prędkości rowerzysty w postaci histogramu



# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Przykład: analiza 94 wyników (duża statystyka!) pomiaru prędkości rowerzysty w postaci histogramu



# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Dla mniejszych statystyk (np. 10-30 pomiarów) nie jesteśmy w stanie dopasować rozkładu Gaussa i uzyskać w ten sposób oszacowanie parametrów  $x_0$  i  $\sigma$ .

Możemy jednak zawsze posłużyć się następującymi przybliżeniami tych wartości:

Estymatorem wielkości oczekiwanej  $x_0$  jest średnia arytmetyczna:

$$x_0 \longrightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Miarą niepewności pojedynczego pomiaru jest jego odchylenie od wartości średniej (estymator odchylenia standardowego):

$$\sigma \longrightarrow S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$



# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Estymatorem niepewności wyniku pomiaru jest odchylenie standardowe średniej arytmetycznej:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \qquad S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

wielkość  $S_{\bar{x}}$  można zmniejszać zwiększając liczbę pomiarów !!!

Tak obliczoną niepewność interpretujemy następująco: wykonując kolejną serie  $n$  pomiarów i obliczając średnią wartość wielkości  $x$ , możemy tę wartość znaleźć w przedziale

$$\langle \bar{x} - S_{\bar{x}}, \bar{x} + S_{\bar{x}} \rangle \text{ z prawdopodobieństwem } 0.683.$$

Interpretacja taka jest równoznaczna ze stwierdzeniem, że wartość rzeczywista mierzonej wielkości  $x$  mieści się w tym przedziale z prawdopodobieństwem 0.683.

# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Dla bardzo małych serii pomiarowych  $\leq 10$  odchylenie standardowe średniej arytmetycznej daje zaniżoną wartość niepewności wyniku:

$$S_{\bar{x}} \rightarrow t_{n,\alpha} S_{\bar{x}}$$

$t_{n,\alpha}$  - współczynnik Studenta

$n$  - liczba pomiarów

$\alpha$  - poziom ufności  
prawdopodobieństwo z jakim  
wyznaczony przedział

$$\left\langle \bar{x} - t_{n,\alpha} S_{\bar{x}}, \bar{x} + t_{n,\alpha} S_{\bar{x}} \right\rangle$$

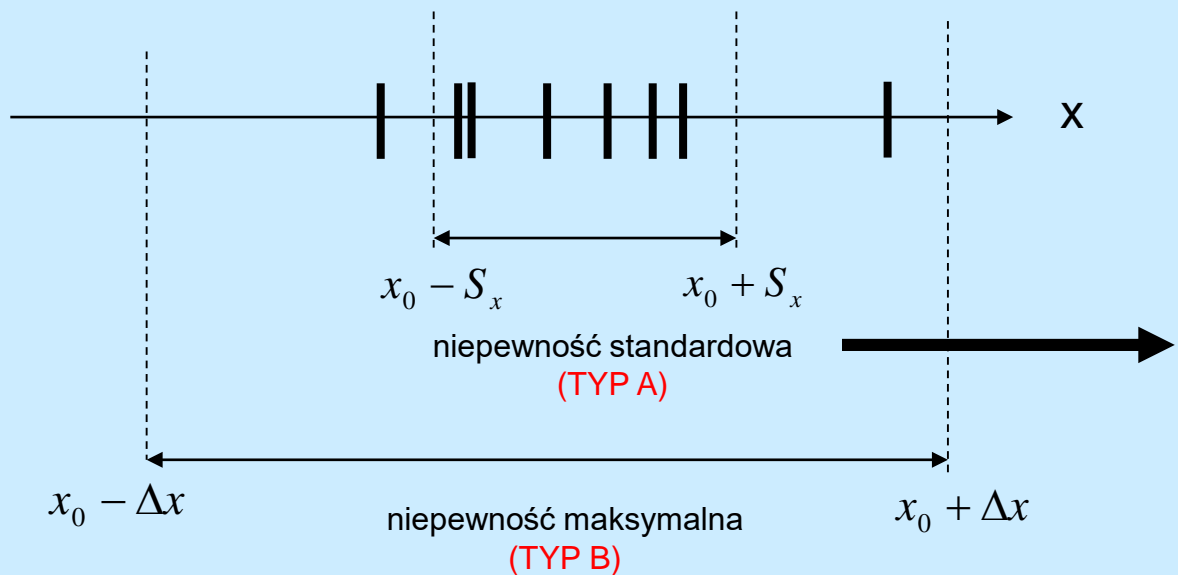
zawiera wartość rzeczywistą mierzonej wielkości

Ten poziom ufności stosujemy  
w analizie pomiarów I prac.

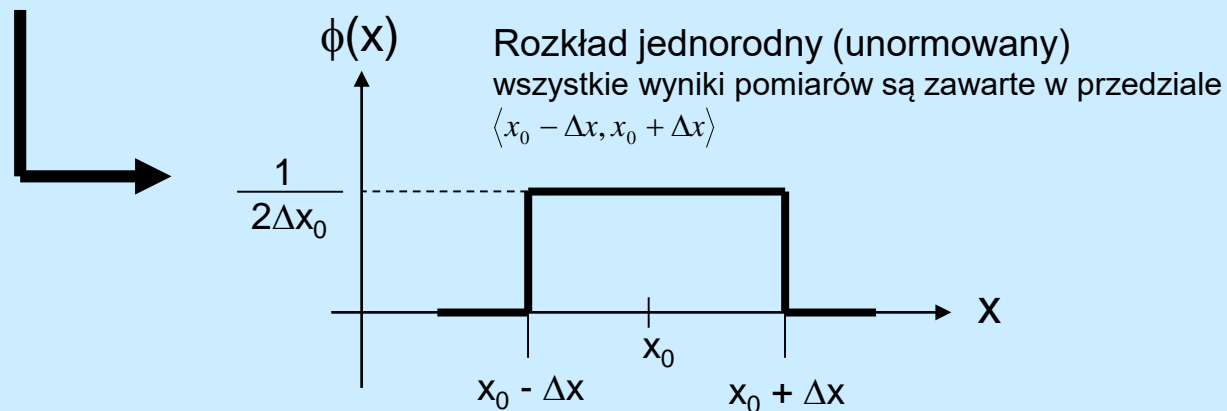
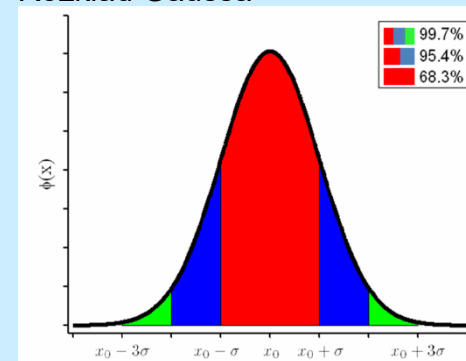
n	$\alpha=0.68$	$\alpha=0.95$	$\alpha=0.99$
2	1.837	12.706	63.657
3	1.321	4.303	9.926
4	1.197	3.182	5.841
5	1.141	2.776	4.604
6	1.11	2.58	4.032
7	1.09	2.447	3.707
8	1.077	2.365	3.5
9	1.066	2.306	3.355
10	1.059	2.252	3.25

# Typ B: Brak możliwości statystycznej analizy danych

Dla błędów systematycznych lub pojedynczych pomiarów możemy stosować niepewność maksymalną (nazywaną także graniczną)



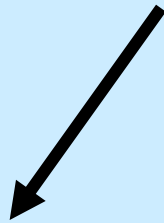
Rozkład Gaussa



# Całkowita niepewność pomiarowa (Typ A + Typ B)

Całkowita niepewność pomiarowa zawiera zarówno niepewności przypadkowe jak i niepewności systematyczne.

Mamy dwa możliwe podejścia:



Włączenie niepewności maksymalnej do analizy statystycznej

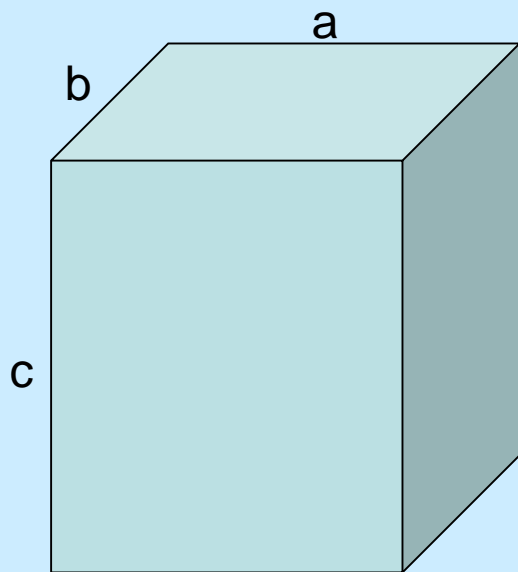
$$\bar{S}_x = \sqrt{S_x^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^2}$$



Włączenie niepewności standardowej do analizy deterministycznej

$$\Delta x_{MAX} = \Delta x + 3S_x$$

# Pomiar bezpośredni i pośredni



Prosty przykład:

Obiekt pomiaru – prostopadłościan (a, b, c)

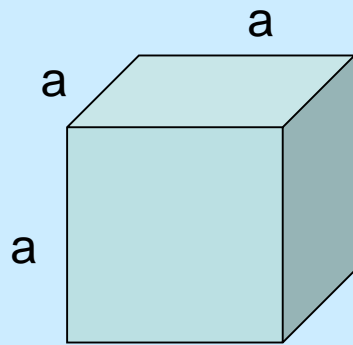
Pomiar bezpośredni:  
pomiar wysokości (c)  
prostopadłościanu

Pomiar pośredni:  
pomiar objętości  
prostopadłościanu  
 $V = abc$

# Niepewność w pomiarach pośrednich – propagacja błędów statystycznych.

## Prosty przykład:

Jaki jest błąd pomiaru objętości  $V$  sześcianu jeśli ustaliliśmy, że błąd pomiaru długości  $a = \bar{x}$  wynosi  $\Delta x$ ?



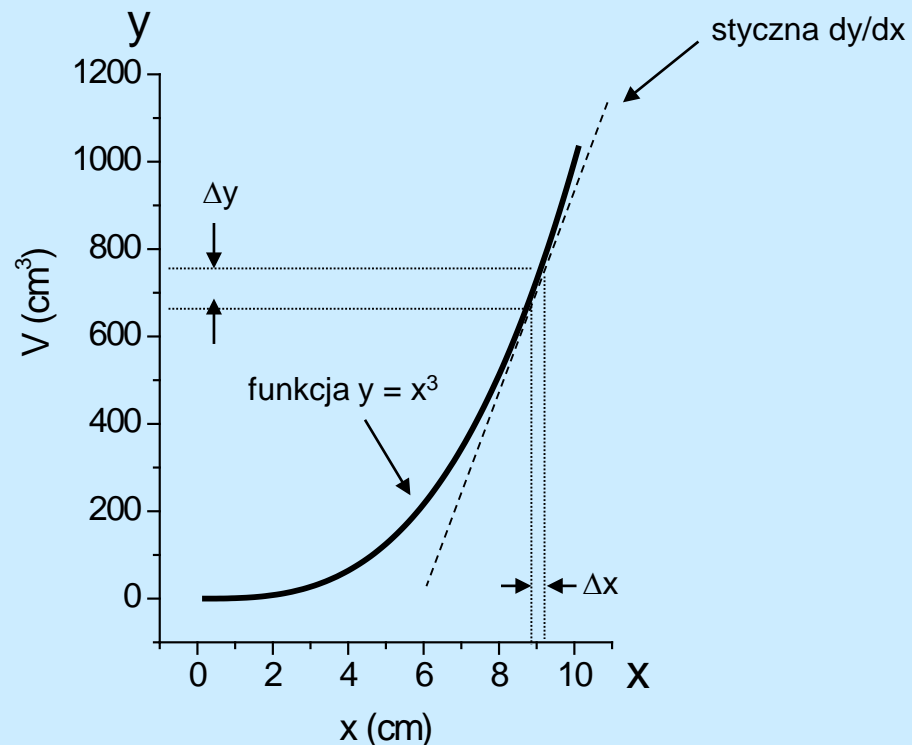
$$a \rightarrow \bar{x}$$

$$V \rightarrow \bar{y}$$

$$y = f(x) = x^3$$

$$V = \bar{y} = f(\bar{x}) = \bar{x}^3$$

$$\Delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x$$



# Niepewność w pomiarach pośrednich – propagacja błędów statystycznych.

Ogólna postać niepewności dla funkcji wielu zmiennych

TYP B

Podejście deterministyczne

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right|$$

TYP A

Podejście statystyczne

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} S_{\bar{x}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} S_{\bar{x}_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} S_{\bar{x}_n} \right)^2}$$

# Zapis niepewności

- Podaje się tylko **dwie cyfry znaczące** estymatora niepewności . Liczymy co najmniej trzy i zaokrąglamy zawsze do góry.
- Wynik pomiaru obliczamy o co najmniej jedno miejsce dziesiętne dalej niż miejsce dziesiętne, na którym zaokrąglono błąd, a następnie zaokrąglamy wg. normalnych reguł do tego samego miejsca dziesiętne, do którego zaokrąglono błąd.

Notatki

$$\bar{g} = 9.8145467 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.21434 \frac{m}{s^2}$$

Sprawozdanie

$$\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$$

Zapis  
nieprawidłowy

~~$$\bar{g} = 9.814 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$$~~

~~$$\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.214 \frac{m}{s^2}$$~~



# Niepewność bezwzględna, względna i procentowa ?

$$x \pm \Delta x$$

niepewność bezwzględna

$$\frac{\Delta x}{|x|}$$

niepewność względna

$$\frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%$$

niepewność procentowa

# Porównywanie wyników

## 1) porównanie z wielkością tablicową

warunek zgodności  $|\bar{x} - x_{tab}| < kS_{\bar{x}}$

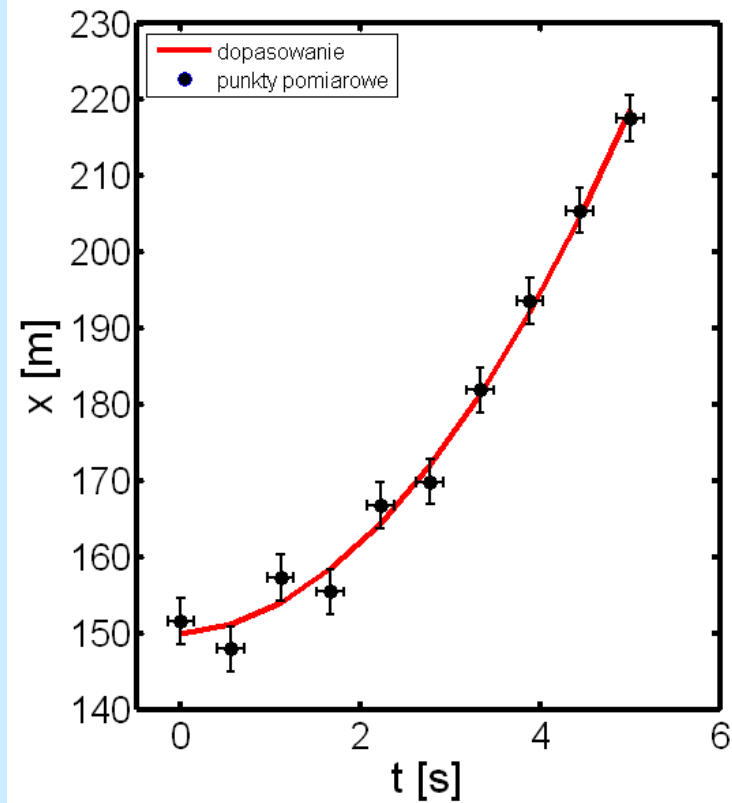
gdzie  $k = 2$  wg. ISO

## 2) porównanie dwóch zmierzonych wielkości

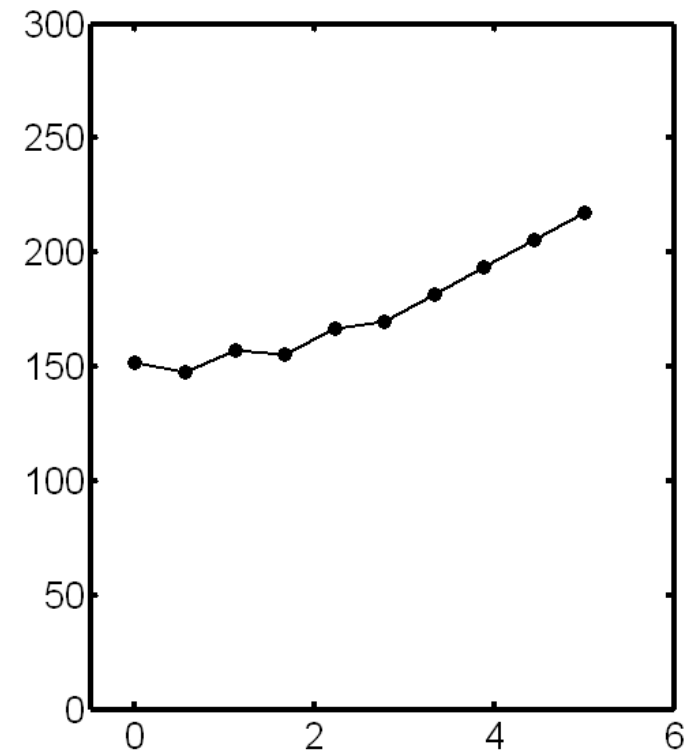
warunek zgodności  $|\bar{x}_A - \bar{x}_B| < k\sqrt{S_{\bar{x}_A}^2 + S_{\bar{x}_B}^2}$

# Rysowanie wykresów

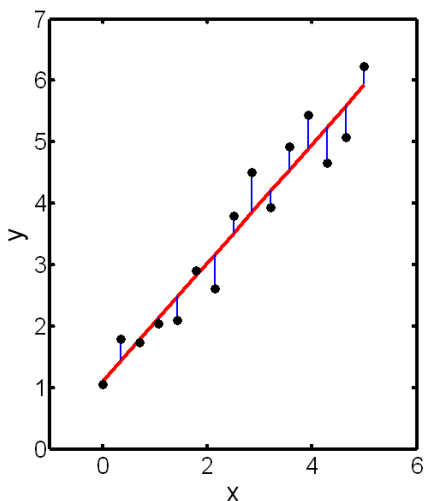
Poprawnie



Błędnie



# Regresja liniowa – dopasowywanie prostej do zbioru punktów doświadczalnych



**Problem:**

poprowadzenie prostej  $y = a \cdot x + b$  jak najlepiej dopasowanej do zbioru punktów doświadczalnych  $(y_1x_1, y_2x_2, \dots, y_nx_n)$  i znalezienie parametrów  $a$  i  $b$  oraz ich niepewności ( $S_a$  i  $S_b$ ).

**Metoda analityczna:**

Metoda najmniejszych kwadratów polegająca na takim doborze parametrów  $a$  i  $b$  aby zminimalizować sumę kwadratu różnicy pomiędzy odciętą punktu pomiarowego i odpowiadającym mu punktem dopasowywanej prostej.

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min$$



$$\bar{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{C} \quad S_a = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{b} \sum_{i=1}^n y_i}{n-2} \cdot \frac{1}{C}}$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad S_b = S_a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

gdzie

$$C = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad D = n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2$$

**Współczynnik korelacji**

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{CD}}$$

$$|r| \leq 1$$

im  $r$  bliższe 1 tym  
lepsze dopasowanie !

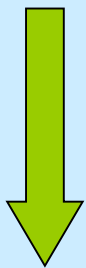
Liczmy używając  
odpowiedniego  
oprogramowania

# Regresja liniowa – linearyzacja nieliniowych zależności funkcyjnych.

Przykład:

Zmiana napięcia w czasie w trakcie rozładowywania kondensatora

$$U(t) = U_0 \exp(-t/\tau)$$

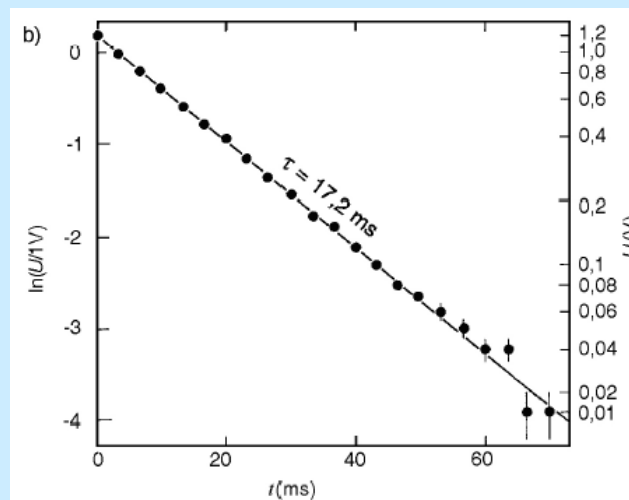
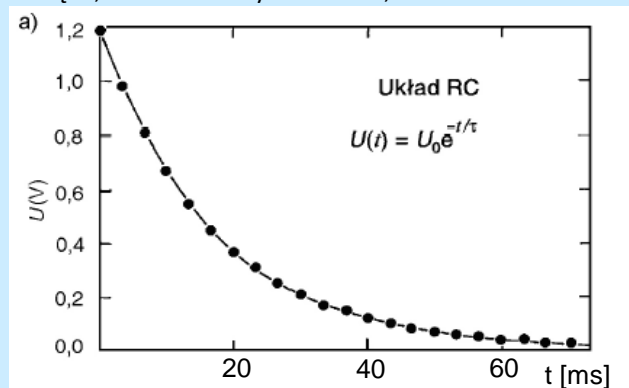


$$\ln(U) = \ln U_0 - t/\tau$$

↓                      ↓                      ↓

$$y = b + a \cdot x$$

A.Zięba, Pracownia Fizyczna WFiTJ, 2002



# Kilka praktycznych uwag - podsumowanie:

1. Przed przystąpieniem do analizy błędów proszę zastanowić się jakiego rodzaju błędy mają kluczowe znaczenie statystyczne (szумы, czas i sposób reakcji eksperymentatora) czy systematyczne (dokładność przyrządu pomiarowego). Proszę porównać ich wielkość.
2. W znakomitej większości przypadków pomiary na I Pracowni opierają się na zaledwie kilkukrotnym pomiarze danej wielkości dlatego konieczne jest wykorzystanie wsp. Studenta (poziom ufności 0.95) lub oszacowanie błędu maksymalnego (w zależności od charakteru błędu – patrz punkt 1).
3. Uzyskany wynik pomiaru należy sprawdzić poprzez 1) sprawdzenie zgodności jednostek 2) porównanie z jakimś odniesieniem literaturowym
4. Uzyskaną wartość niepewności wyniku należy koniecznie przedstawić jako niepewność względną tak aby uniknąć „genialnych” wniosków w postaci:  
pojemność  $C = 100 \mu\text{F} \pm 10\text{mF}$  gdzie względna niepewność jest = 10000% wielkości mierzonej
5. Wykresy związane z opracowaniem danych pomiarowych można dokonywać tylko przy użyciu komputera (np. w programie Origin).
6. Sprawozdania powinny być przygotowywane w edytorze tekstu – ma to dwie praktyczne zalety: 1) Ułatwia poprawę i dyskusję z prowadzącym ćwiczenie 2) Umożliwia nauczanie się płynnego korzystania z edytora – niezbędne w przyszłej pracy niezależnie od wybranego zawodu.

- 1) **I Pracownia fizyczna , red. A. Magiera, OWI Kraków 2006**
- 2) H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999
- 3) A. Zięba, Postępy Fizyki, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247