

# Podstawy analizy niepewności pomiarowych (I Pracownia Fizyki)

**Piotr Cyganik**

Zakład Fizyki Nanostruktur i Nanotechnologii

Instytut Fizyki UJ

Pok. B-1-13

Tel. 012-664-4520

e-mail: [piotr.cyganik@uj.edu.pl](mailto:piotr.cyganik@uj.edu.pl)

# Co to jest błąd pomiarowy?

wynik pomiaru      wartość prawdziwa

Błąd pomiarowy =  $x_i - x_0$

## a) błąd przypadkowy

nie skorelowane błędy eksperymentatora,  
szумы układu pomiarowego, zakłócenia



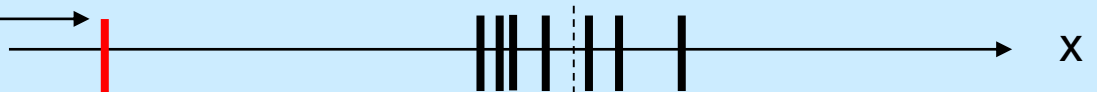
## b) błąd systematyczny

Systematyczna różnica pomiędzy kolejnymi  
pomiarami a wartością prawdziwą



## c) błąd grubý

Drastycznie duża różnica pomiędzy pomiarem i wartością  
prawdziwą wynikająca np. ze złego odczytu lub zapisu pomiaru



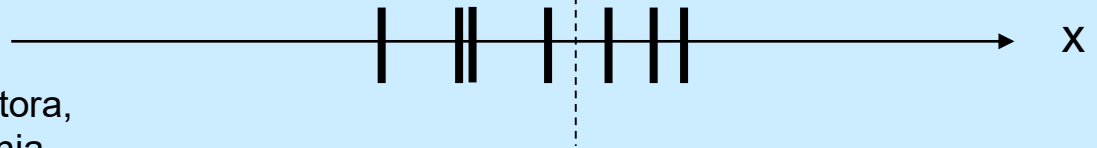
# Co to jest błąd pomiarowy?

wynik pomiaru      wartość prawdziwa

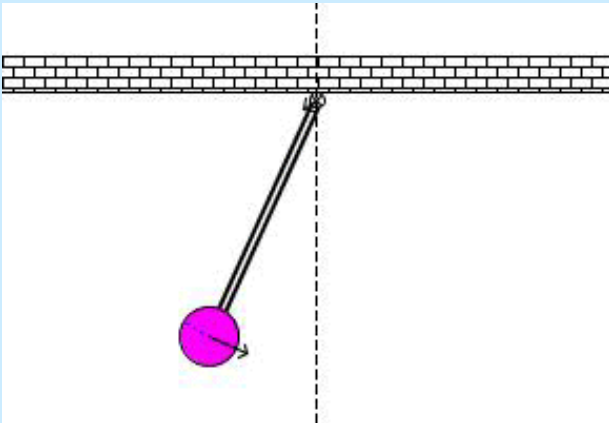
$$\text{Błąd pomiarowy} = x_i - x_0$$

## a) błąd przypadkowy

nie skorelowane błędy eksperymentatora,  
szумы układu pomiarowego, zakłócenia



Przykład: Pomiar okresu drgań wahadła za pomocą stopera



Dokładność pomiaru stopera  
0.01 s

Czas reakcji człowieka  
~0.2 s

(ma charakter przypadkowy)

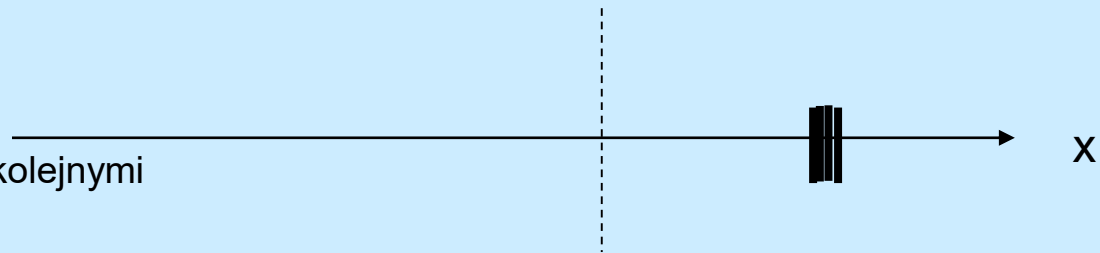
# Co to jest błąd pomiarowy?

wynik pomiaru      wartość prawdziwa

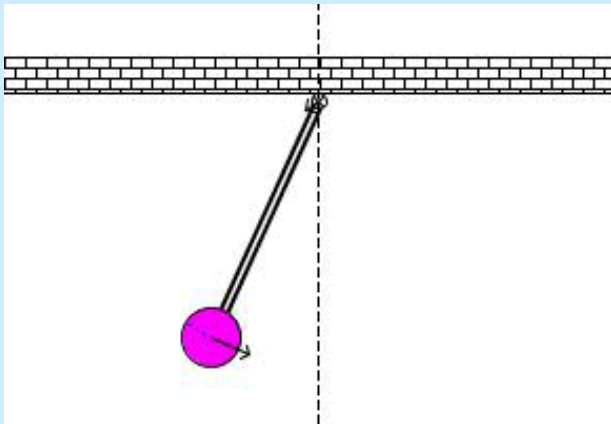
$$\text{Błąd pomiarowy} = x_i - x_0$$

## b) błąd systematyczny

Systematyczna różnica pomiędzy kolejnymi pomiarami a wartością prawdziwą



Przykład: Pomiar okresu drgań wahadła za pomocą sekundnika



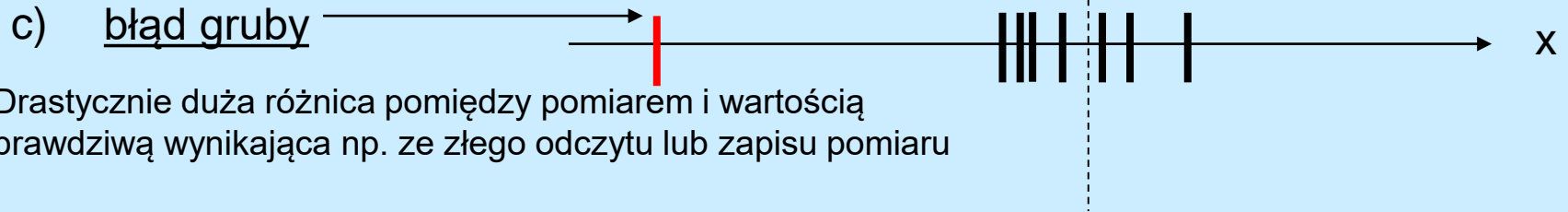
Dokładność pomiaru sekundnika  
1 s  
(mała dokładność podziałki czasu  
da wyraźne i systematyczne przesunięcie  
wyniku w stosunku do wartości prawdziwej)

Czas reakcji człowieka  
~0.2 s

# Co to jest błąd pomiarowy?

wynik pomiaru      wartość prawdziwa

$$\text{Błąd pomiarowy} = x_i - x_0$$



Przykład: Pomiar czasu za pomocą stopera



Odczyt 239 s. zamiast 2 min. 39 s.

# Co to jest niepewność pomiaru ?

„Wyrażanie Niepewności Pomiaru. Przewodnik”. Warszawa, Główny Urząd Miar 1999.

*Niepewność pomiaru jest związanym z rezultatem pomiaru parametrem, charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej.*

Mamy dwa generalne podejścia do oceny niepewności pomiarowych

## TYP A

### Podejście statystyczne

statystyczna analiza danych pomiarowych stosujemy do błędów przypadkowych i odpowiednio dużej liczby pomiarów

## TYP B

### Podejście deterministyczne

w przypadku braku możliwości statystycznej analizy danych wykonujemy pewne oszacowanie - stosujemy do błędów systematycznych i pojedynczych pomiarów

# Niepewność bezwzględna, względna i procentowa ?

$$x \pm \Delta x$$

niepewność bezwzględna

$$\frac{\Delta x}{|x|}$$

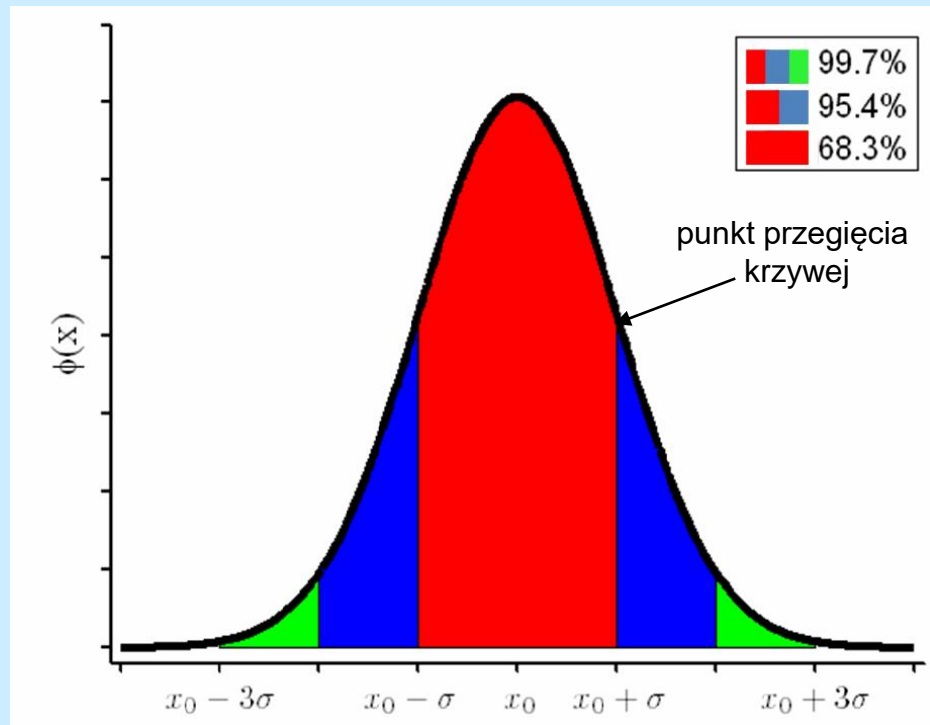
niepewność względna

$$\frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%$$

niepewność procentowa

# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Niepewności przypadkowe opisane są rozkładem prawdopodobieństwa typu Gaussa (normalnym).



$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

to jest rozkład w postaci unormowanej

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$$

$x$  – wartość mierzona

$x_0$  – wartość oczekiwana

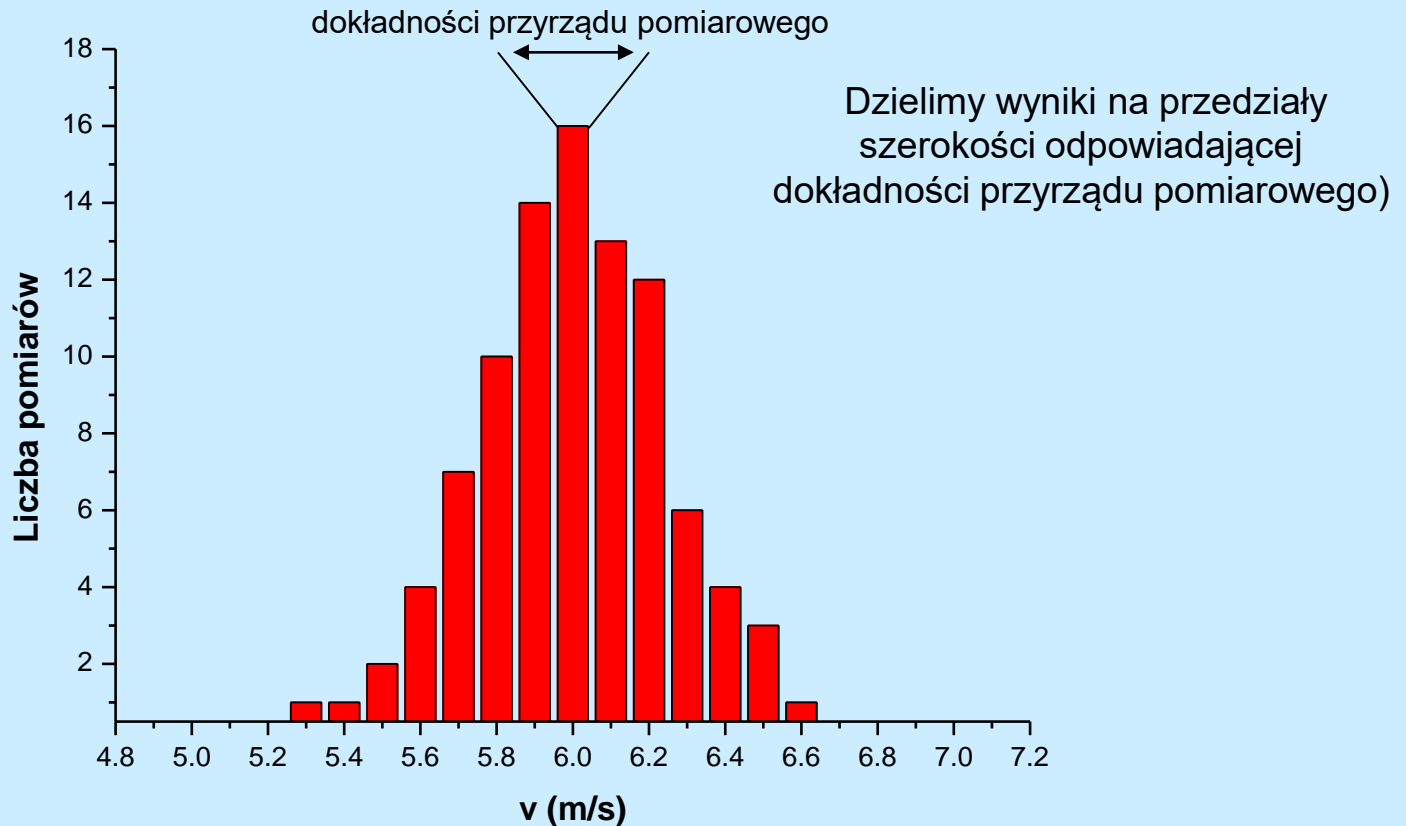
$\sigma$  – odchylenie standardowe  
(miara niepewności pojedynczego pomiaru)

Ponieważ w praktyce laboratoryjnej wykonujemy zawsze skończoną liczbę pomiarów to parametry rozkładu Gaussa możemy jedynie estymować !



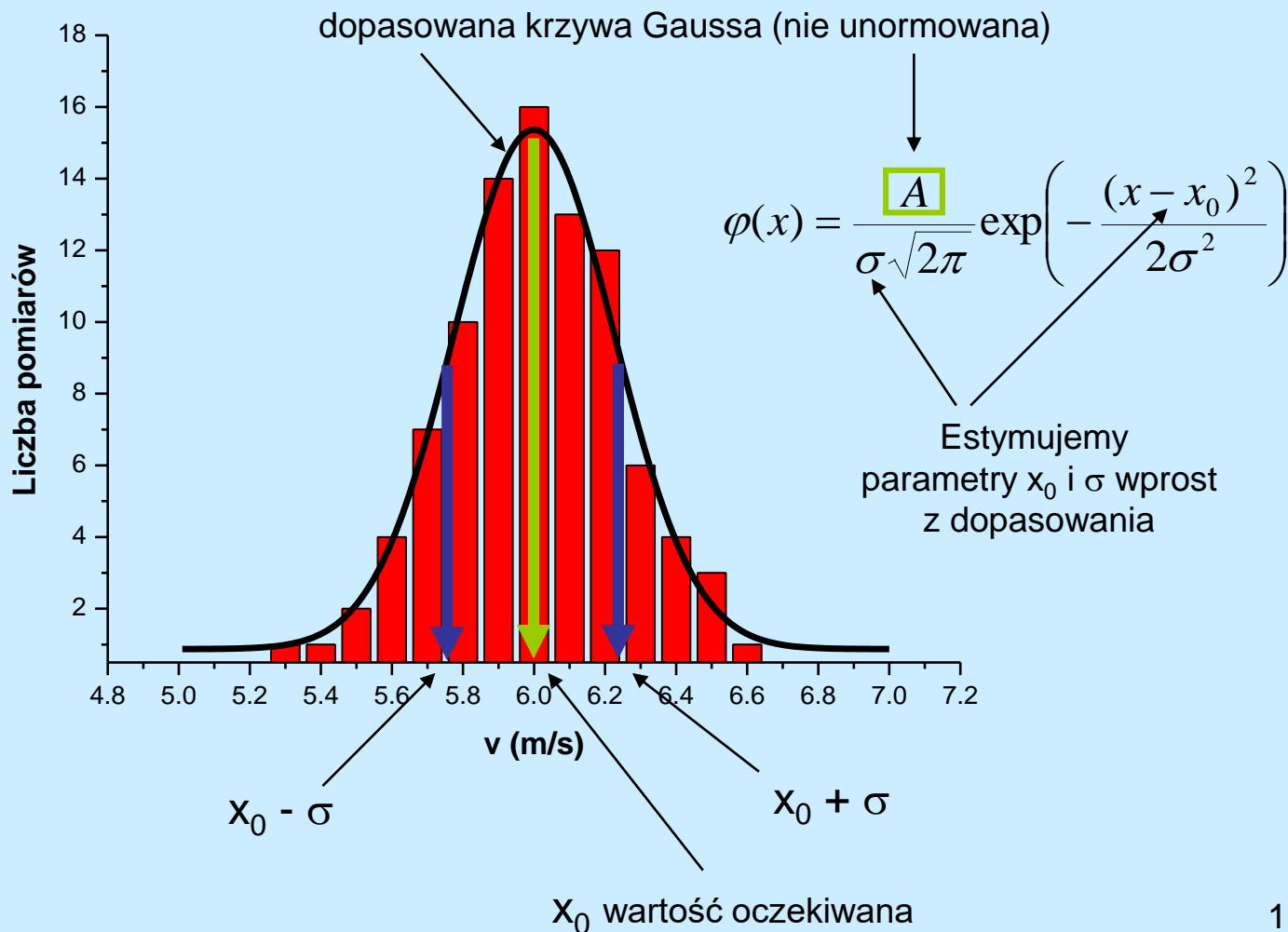
# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Przykład: analiza 94 wyników (duża statystyka!) pomiaru prędkości rowerzysty w postaci histogramu



# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Przykład: analiza 94 wyników (duża statystyka!) pomiaru prędkości rowerzysty w postaci histogramu



# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Dla mniejszych statystyk (np. 10-30 pomiarów) nie jesteśmy w stanie dopasować rozkładu Gaussa i uzyskać w ten sposób oszacowanie parametrów  $x_0$  i  $\sigma$ .

Możemy jednak zawsze posłużyć się następującymi przybliżeniami tych wartości:

Estymatorem wielkości oczekiwanej  $x_0$  jest średnia arytmetyczna:

$$x_0 \longrightarrow \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Miarą niepewności pojedynczego pomiaru jest jego odchylenie od wartości średniej (estymator odchylenia standardowego):

$$\sigma \longrightarrow S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Estymatorem niepewności wyniku pomiaru jest odchylenie standardowe średniej arytmetycznej:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \qquad S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

wielkość  $S_{\bar{x}}$  można zmniejszać zwiększając liczbę pomiarów !!!

Tak obliczoną niepewność interpretujemy następująco: wykonując kolejną serię  $n$  pomiarów i obliczając średnią wartość wielkości  $x$ , możemy tę wartość znaleźć w przedziale

$$\langle \bar{x} - S_{\bar{x}}, \bar{x} + S_{\bar{x}} \rangle \text{ z prawdopodobieństwem } 0.683.$$

Interpretacja taka jest równoznaczna ze stwierdzeniem, że wartość rzeczywista mierzonej wielkości  $x$  mieści się w tym przedziale z prawdopodobieństwem 0.683.

# Typ A: Statystyczna analiza danych pomiarowych

Dla bardzo małych serii pomiarowych  $\leq 10$  odchylenie standardowe średniej arytmetycznej daje zaniżoną wartość niepewności wyniku:

$$S_{\bar{x}} \rightarrow t_{n,\alpha} S_{\bar{x}}$$

$t_{n,\alpha}$  - współczynnik Studenta

$n$  - liczba pomiarów

$\alpha$  - poziom ufności  
prawdopodobieństwo z jakim  
wyznaczony przedział

$$\left\langle \bar{x} - t_{n,\alpha} S_{\bar{x}}, \bar{x} + t_{n,\alpha} S_{\bar{x}} \right\rangle$$

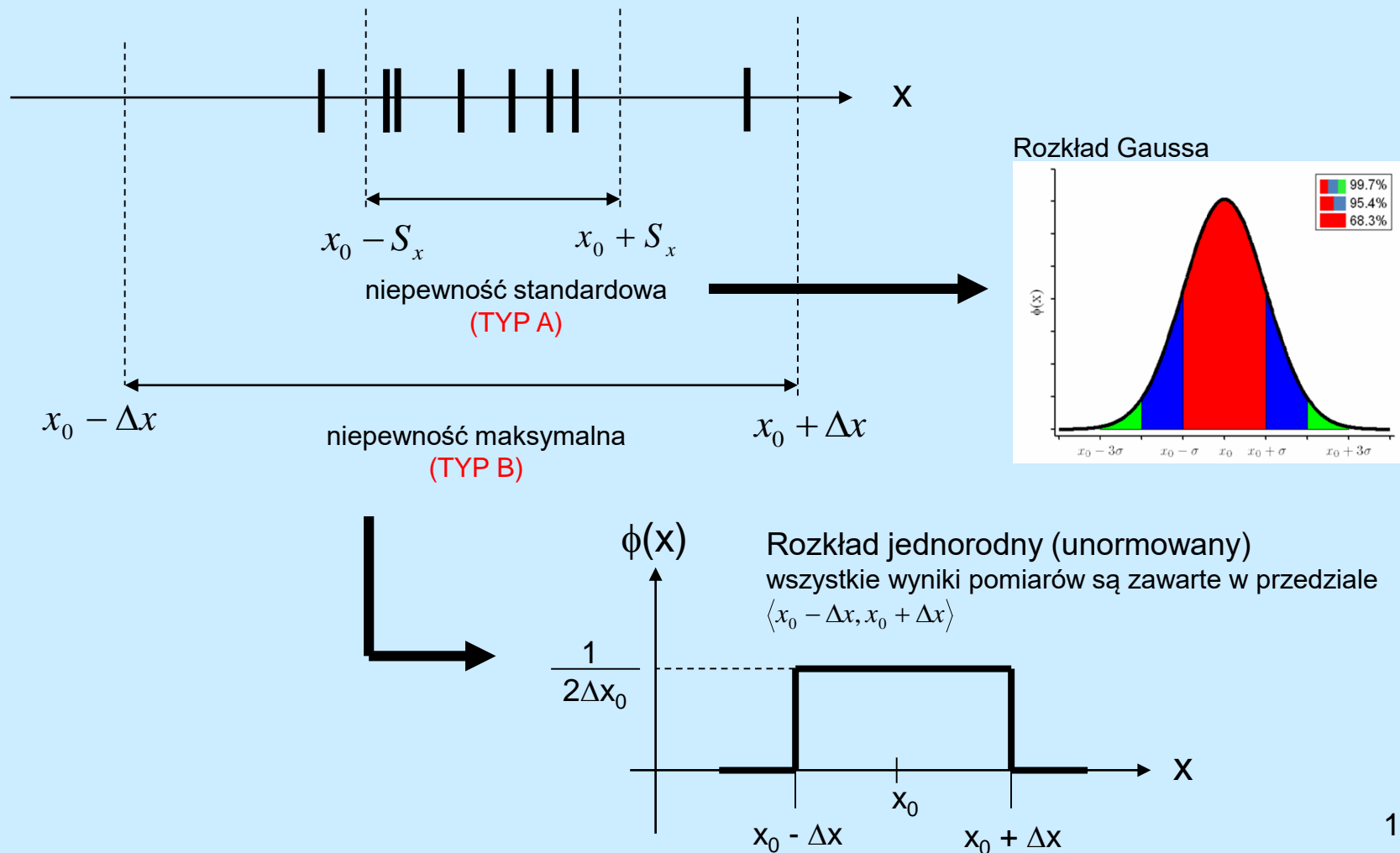
zawiera wartość rzeczywistą mierzonej wielkości

Ten poziom ufności stosujemy  
w analizie pomiarów I prac.

n	$\alpha=0.68$	$\alpha=0.95$	$\alpha=0.99$
2	1.837	12.706	63.657
3	1.321	4.303	9.926
4	1.197	3.182	5.841
5	1.141	2.776	4.604
6	1.11	2.58	4.032
7	1.09	2.447	3.707
8	1.077	2.365	3.5
9	1.066	2.306	3.355
10	1.059	2.252	3.25

# Typ B: Brak możliwości statystycznej analizy danych

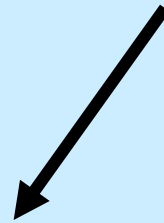
Dla błędów systematycznych lub pojedynczych pomiarów możemy stosować niepewność maksymalną (nazywaną także graniczną)



# Całkowita niepewność pomiarowa (Typ A + Typ B)

Całkowita niepewność pomiarowa zawiera zarówno niepewności przypadkowe jak i niepewności systematyczne.

Mamy dwa możliwe podejścia:



Włączenie niepewności maksymalnej do analizy statystycznej

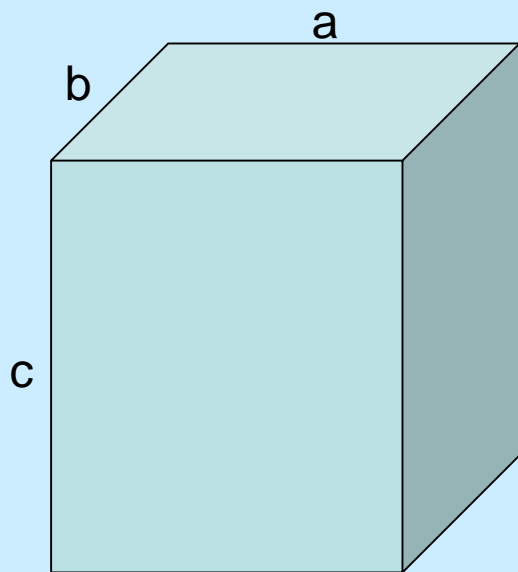
$$\bar{S}_x = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^2}$$



Włączenie niepewności standardowej do analizy deterministycznej

$$\Delta x_{MAX} = \Delta x + 3S_{\bar{x}}$$

# Pomiar bezpośredni i pośredni



Prosty przykład:

Obiekt pomiaru – prostopadłościan (a, b, c)

Pomiar bezpośredni:  
pomiar wysokości (c)  
prostopadłościanu

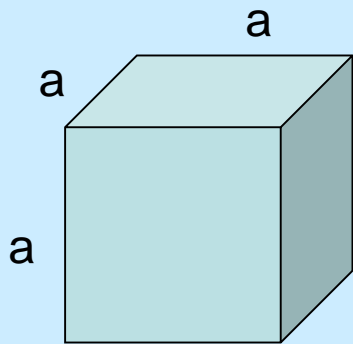
Pomiar pośredni:  
pomiar objętości  
prostopadłościanu  
 $V = abc$



# Niepewność w pomiarach pośrednich – propagacja błędów statystycznych.

Prosty przykład:

Jaki jest błąd pomiaru objętości  $V$  sześcianu jeśli ustaliliśmy, że błąd pomiaru długości  $a = \bar{x}$  wynosi  $\Delta x$ ?



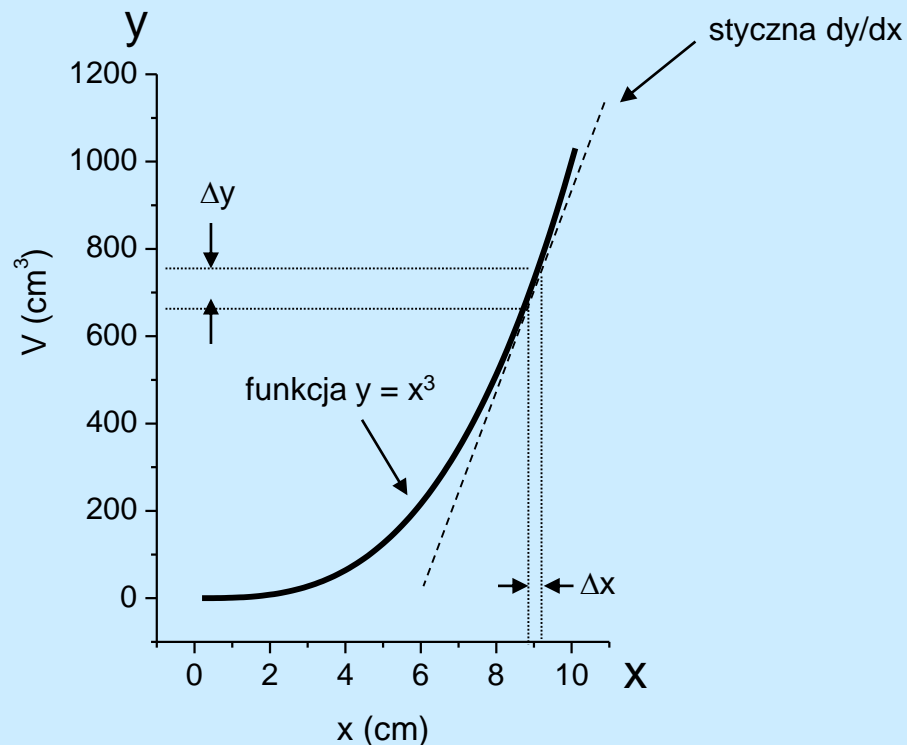
$$a \rightarrow \bar{x}$$

$$V \rightarrow \bar{y}$$

$$y = f(x) = x^3$$

$$V = \bar{y} = f(\bar{x}) = \bar{x}^3$$

$$\Delta y = \left| \frac{dy}{dx} \right| \Delta x$$



# Niepewność w pomiarach pośrednich – propagacja błędów statystycznych.

Ogólna postać niepewności dla funkcji wielu zmiennych

TYP B

Podejście deterministyczne

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \right|$$

TYP A

Podejście statystyczne

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x_1} S_{\bar{x}_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} S_{\bar{x}_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial x_n} S_{\bar{x}_n} \right)^2}$$

# Zapis niepewności

- Podaje się tylko **dwie cyfry znaczące** estymatora niepewności . Liczymy co najmniej trzy i zaokrąglamy zawsze do góry.
- Wynik pomiaru obliczamy o co najmniej jedno miejsce dziesiętne dalej niż miejsce dziesiętne, na którym zaokrąglono błąd, a następnie zaokrąglamy wg. normalnych reguł do tego samego miejsca dziesiętne, do którego zaokrąglono błąd.

Notatki

$$\bar{g} = 9.8145467 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.21434 \frac{m}{s^2}$$

Sprawozdanie

$$\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$$

Zapis  
nieprawidłowy

~~$$\bar{g} = 9.814 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$$~~

~~$$\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.214 \frac{m}{s^2}$$~~

# Porównywanie wyników

## 1) porównanie z wielkością tablicową

warunek zgodności  $|\bar{x} - x_{tab}| < kS_{\bar{x}}$

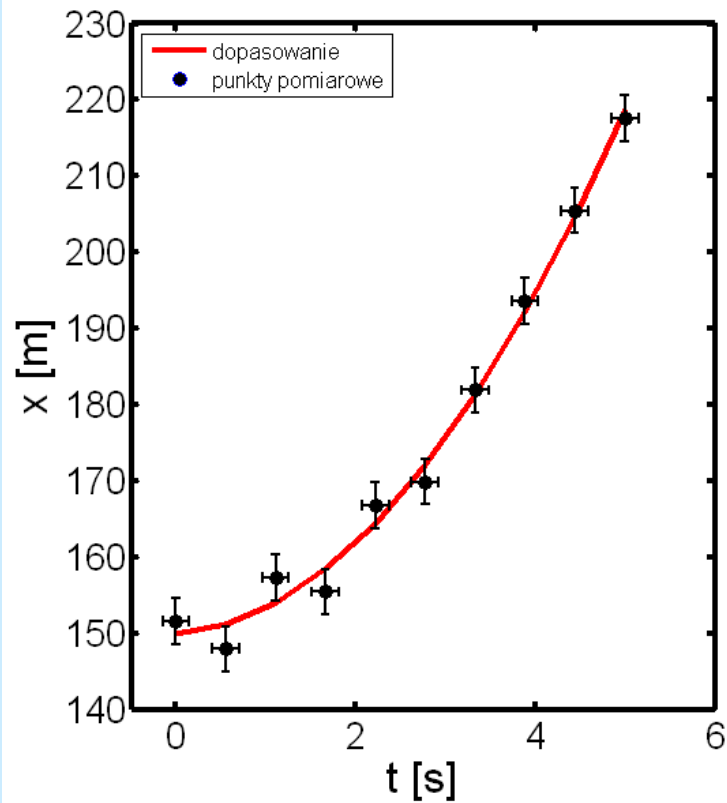
gdzie  $k = 2$  wg. ISO

## 2) porównanie dwóch zmierzonych wielkości

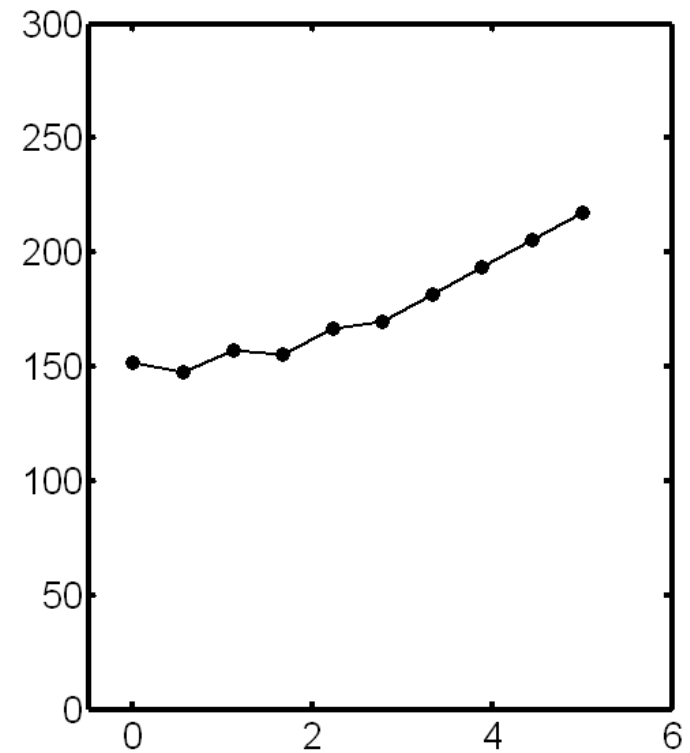
warunek zgodności  $|\bar{x}_A - \bar{x}_B| < k\sqrt{S_{\bar{x}_A}^2 + S_{\bar{x}_B}^2}$

# Rysowanie wykresów

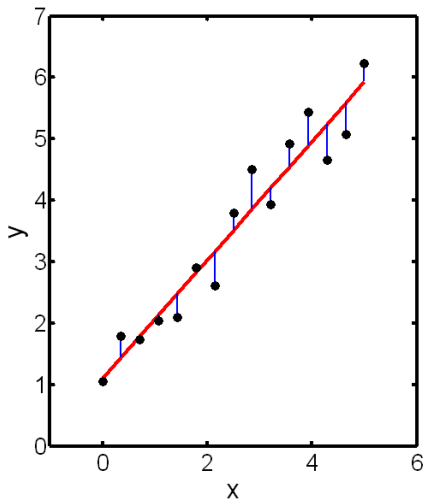
Poprawnie



Błędnie



# Regresja liniowa – dopasowywanie prostej do zbioru punktów doświadczalnych



Problem:

poprowadzenie prostej  $y = a \cdot x + b$  jak najlepiej dopasowanej do zbioru punktów doświadczalnych  $(y_1x_1, y_2x_2, \dots, y_nx_n)$  i znalezienie parametrów  $a$  i  $b$  oraz ich niepewności ( $S_a$  i  $S_b$ ).

Metoda analityczna:

Metoda najmniejszych kwadratów polegająca na takim doborze parametrów  $a$  i  $b$  aby zminimalizować sumę kwadratu różnicy pomiędzy odciętą punktu pomiarowego i odpowiadającym mu punktem dopasowywanej prostej.

$$\sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min$$



$$\bar{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{C} \quad S_a = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{b} \sum_{i=1}^n y_i}{n-2} \cdot \frac{1}{C}}$$

$$\bar{b} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \bar{a} \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad S_b = S_a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

gdzie

$$C = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad D = n \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2$$

**Współczynnik korelacji**

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{CD}}$$

$$|r| \leq 1$$

im  $r$  bliższe 1 tym  
lepsze dopasowanie !

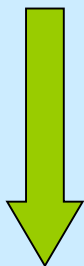
Liczmy używając  
odpowiedniego  
oprogramowania

# Regresja liniowa – linearyzacja nieliniowych zależności funkcyjnych.

Przykład:

Zmiana napięcia w czasie w trakcie rozładowywania kondensatora

$$U(t) = U_0 \exp(-t/\tau)$$

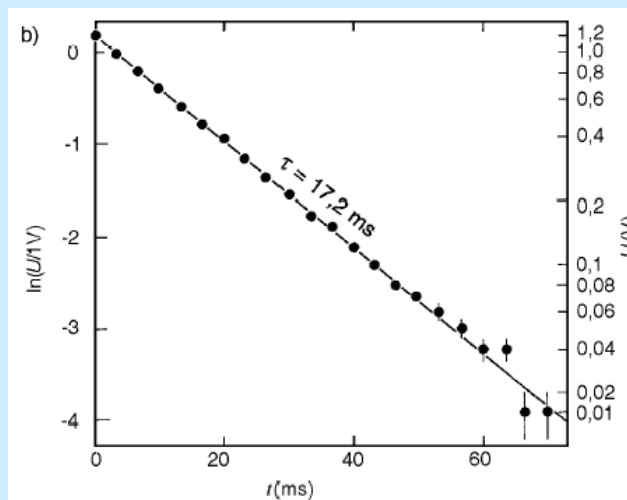
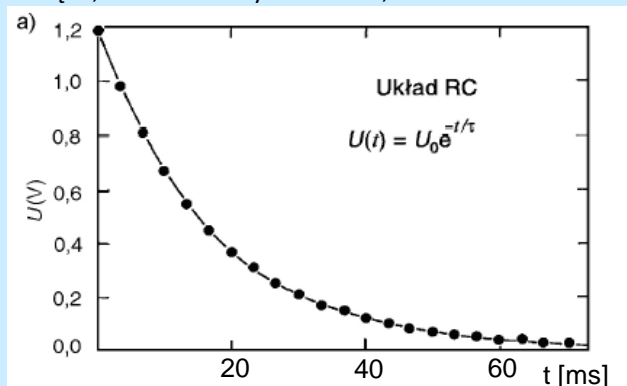


$$\ln(U) = \ln U_0 - t/\tau$$

↓                      ↓                      ↓

$$y = b + a \cdot x$$

A.Zięba, Pracownia Fizyczna WFiTJ, 2002



# Kilka praktycznych uwag - podsumowanie:

1. Przed przystąpieniem do analizy błędów proszę zastanowić się jakiego rodzaju błędy mają kluczowe znaczenie statystyczne (szумы, czas i sposób reakcji eksperymentatora) czy systematyczne (dokładność przyrządu pomiarowego). Proszę porównać ich wielkość.
2. W znakomitej większości przypadków pomiary na I Pracowni opierają się na zaledwie kilkukrotnym pomiarze danej wielkości dlatego konieczne jest wykorzystanie wsp. Studenta (poziom ufności 0.95) lub oszacowanie błędu maksymalnego (w zależności od charakteru błędu – patrz punkt 1).
3. Uzyskany wynik pomiaru należy sprawdzić poprzez 1) sprawdzenie zgodności jednostek 2) porównanie z jakimś odniesieniem literaturowym
4. Uzyskaną wartość niepewności wyniku należy koniecznie przedstawić jako niepewność względną tak aby uniknąć „genialnych” wniosków w postaci:  
pojemność  $C = 100 \mu\text{F} \pm 10\text{mF}$  gdzie względna niepewność jest = 10000% wielkości mierzonej
5. Wykresy związane z opracowaniem danych pomiarowych można dokonywać tylko przy użyciu komputera (np. w programie Origin).
6. Sprawozdania powinny być przygotowywane w edytorze tekstu – ma to dwie praktyczne zalety: 1) Ułatwia poprawę i dyskusję z prowadzącym ćwiczenie 2) Umożliwia nauczanie się płynnego korzystania z edytora – niezbędne w przyszłej pracy niezależnie od wybranego zawodu.



- 1) **I Pracownia fizyczna , red. A. Magiera, OWI Kraków 2006**
- 2) H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999
- 3) A. Zięba, Postępy Fizyki, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247