



PODSTAWY OPRACOWANIA WYNIKÓW POMIARÓW Z ELEMENTAMI ANALIZY NIEPEWNOŚCI POMIAROWYCH

Dr Benedykt R. Jany



I Pracownia Fizyczna Ochrona Środowiska grupa F1



Rodzaje Pomiarów

- **Pomiar bezpośredni** - bezpośrednio mierzymy wielkość fizyczną prz pomocy przyrządu pomiarowego

Pomiar czasu
stoperem



Pomiar długości
linijką



- **Pomiar pośredni** - wielkość fizyczna mierzona jest pośrednio poprzez pomiar innych wielkości fizycznych

Pomiar prędkości

$$v = \frac{s}{t}$$

Pomiar drogi

Pomiar czasu



**Każdy pomiar nawet
najbardziej dokładny i
precyzyjny obarczony jest
niepewnością pomiarową i
być może błędem**



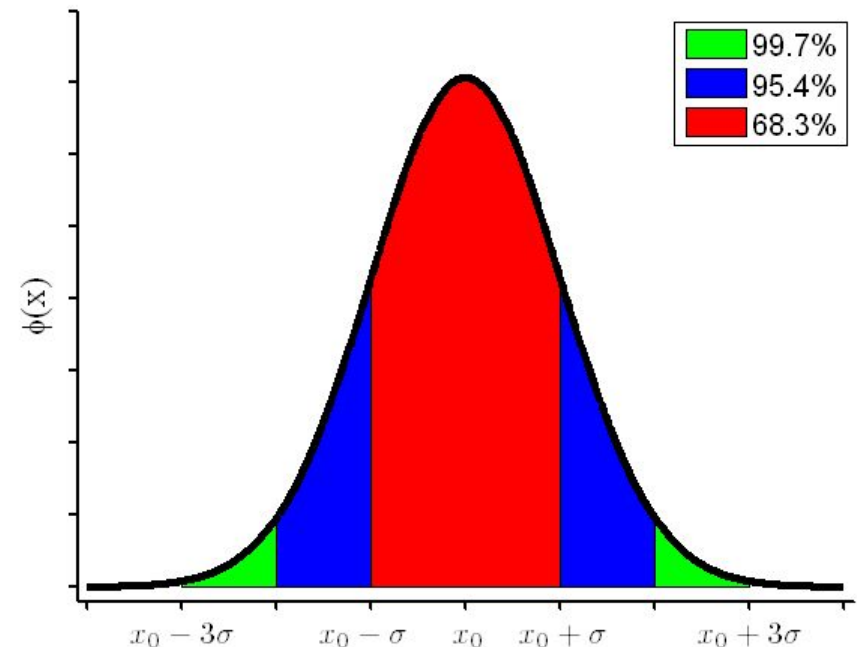
Błędy i Rodzaje Niepewności Pomiarowych

- **Błędy grube** - wynikające z pomyłki eksperymentatora (np. odczyt na niewłaściwej skali przyrządu), aparatury pomiarowej itp., Zwykle na tyle duże, że można je łatwo zauważyć
- **Niepewności systematyczne** - systematycznie przesuwają wyniki w stosunku do prawdziwej wartości podczas wykonywania pomiaru, zwykle trudne do zauważenia i oszacowania
- **Niepewności statystyczne (przypadkowe)** - spowodowane przez wiele niezależnych przyczyn o porównywalnym znaczeniu zmieniających się losowo. Możemy je zmniejszyć poprzez powtarzanie pomiarów.



Niepewności statystyczne (przypadkowe)

- Rozkład prawdopodobieństwa błędów przypadkowych jest rozkładem Gaussa (z wartością oczekiwaną 0 i odchyleniem standardowym σ)
- Rozkład wielkości mierzonej jest również rozkładem Gaussa (tym razem z wartością oczekiwaną równą wartości prawdziwej x_0 i odchyleniem standardowym σ)

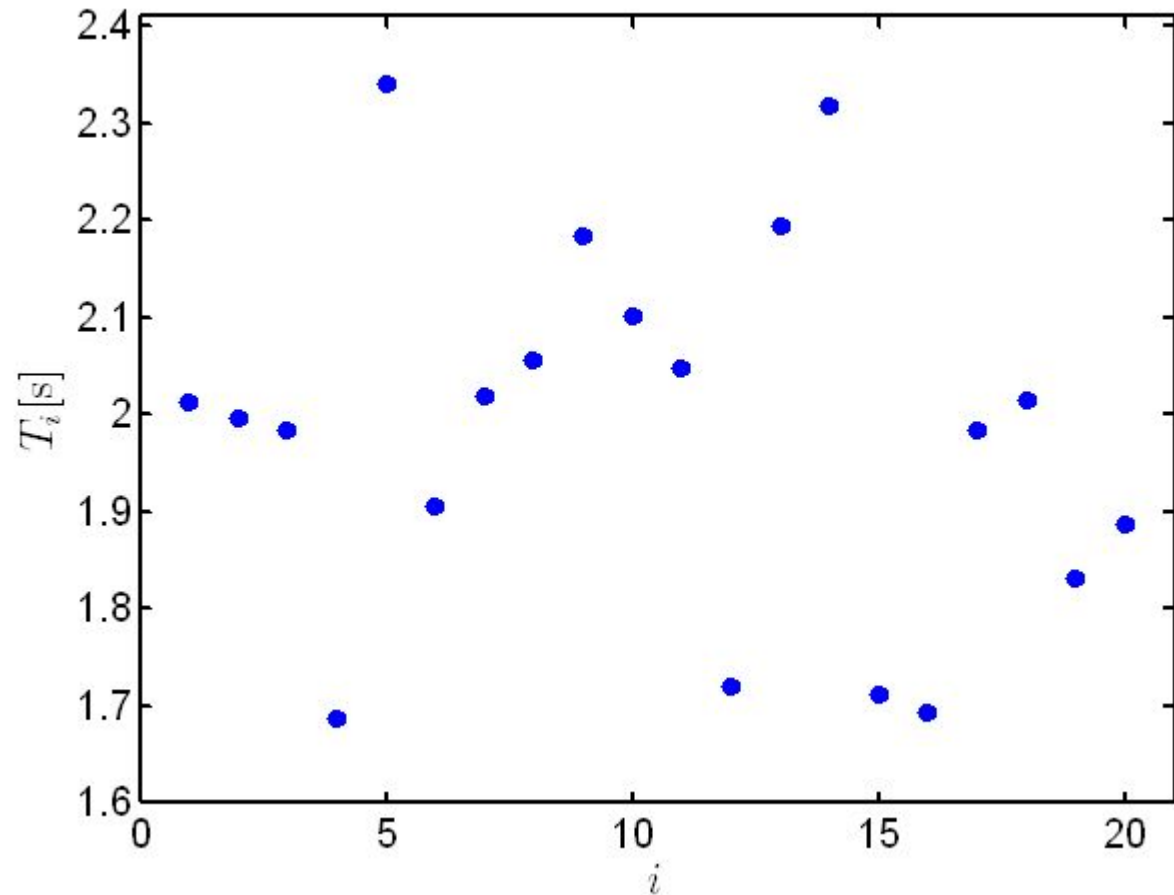


$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Pomiar bezpośredni Niepewności statystyczne

i -ty pomiar	T_i [s]
1	2.01
2	2.00
3	1.98
4	1.69
5	2.34
6	1.91
7	2.02
8	2.06
9	2.18
10	2.10
11	2.05
12	1.72
13	2.19
14	2.32
15	1.71
16	1.69
17	1.99
18	2.02
19	1.83
20	1.89



Jaka jest wartość prawdziwa [wartość oczekiwana] T ???

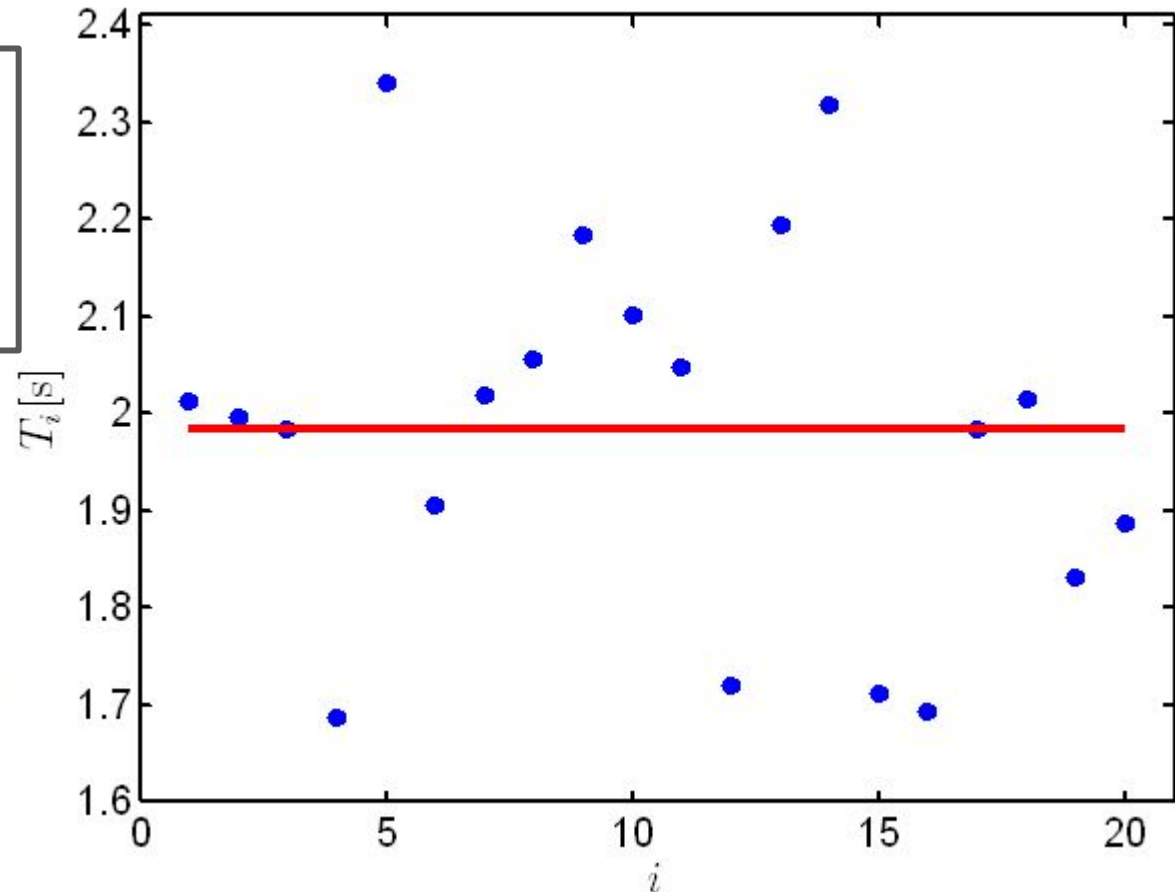


Pomiar bezpośredni Niepewności statystyczne

wielkością najbardziej zbliżoną do wartości prawdziwej [estymatorem wartości oczekiwanej] jest średnia arytmetyczna pomiarów

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{T} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} T_i$$



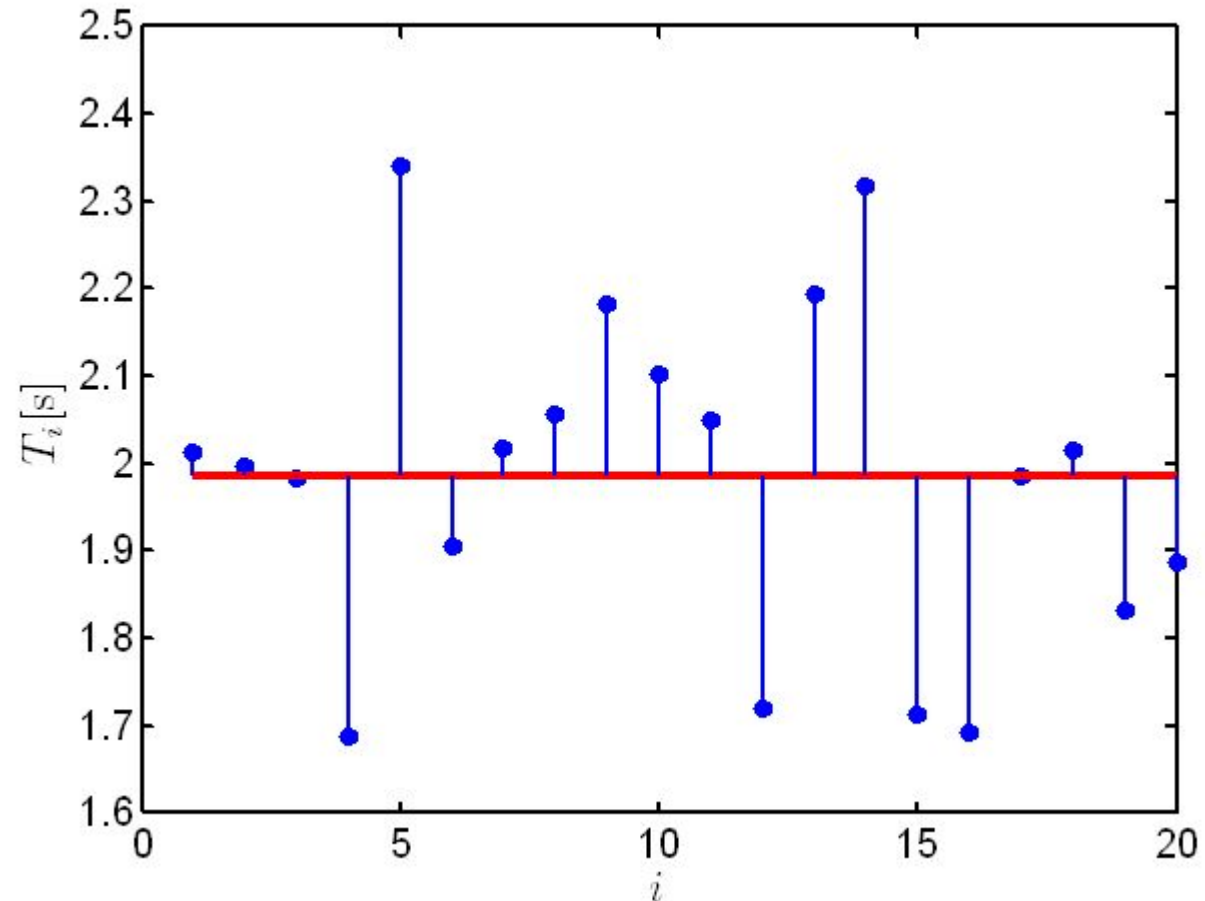


Pomiar bezpośredni Niepewności statystyczne

Odchylenie standardowe - na ile pojedynczy pomiar “odstaje” od średniej arytmetycznej [wartości prawdziwej], niepewność pojedynczego pomiaru

Estymator odchylenia standardowego

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$





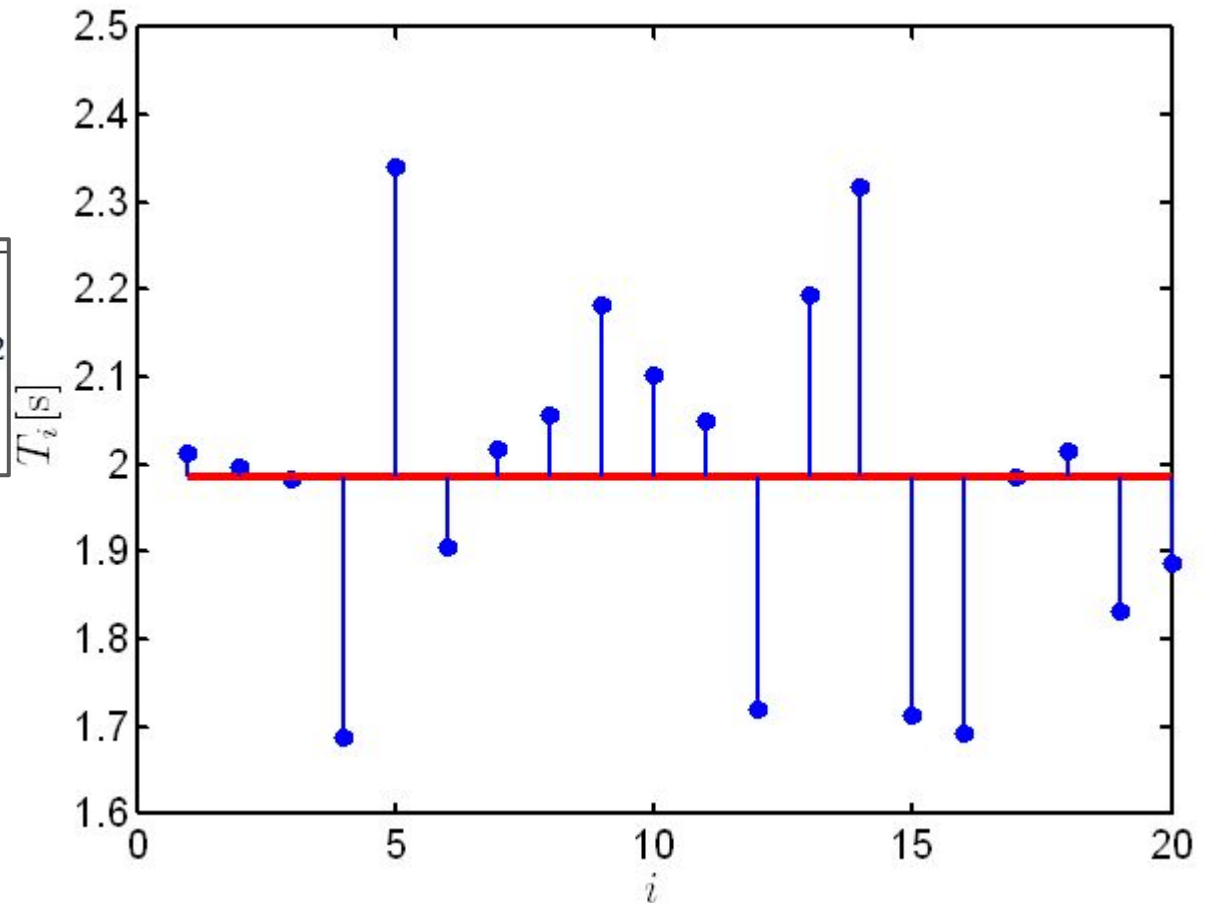
Pomiar bezpośredni Niepewności statystyczne

Odchylenie standardowe średniej - niepewność pomiarowa średniej arytmetycznej, dokładność wyznaczenia prawdziwej wartości

Estymator odchylenia standardowego średniej

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \quad S_{\bar{x}} < S_x$$



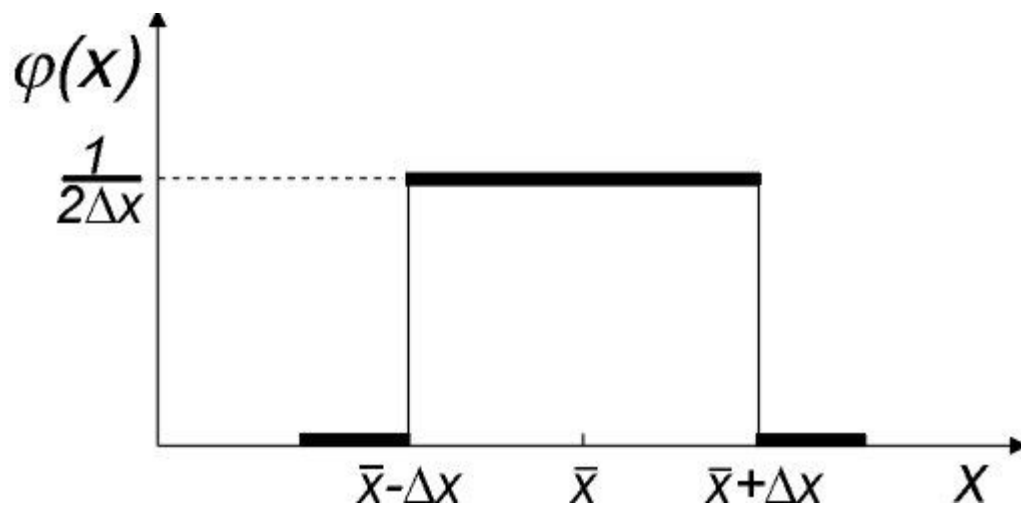


Pomiar bezpośredni Niepewność Całkowita

- Niepewność statystyczna (rozkład Gaussa)
- Niepewność systematyczna (rozkład jednorodny)

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

statystyczna



$$S_x = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{3}}$$

systematyczna

- Niepewność całkowita (uwzględniająca niepewność statystyczną i systematyczną)

$$\overline{S_x} = \sqrt{S_x^2 + \frac{1}{3}(\Delta x)^2}$$

Statystyczna

Systematyczna



Niepewność w pomiarach pośrednich

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$v = \frac{l}{t}$$

Wartość oczekiwana:

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{l}}{\bar{t}}$$

Odchylenie standardowe średniej:

$$S_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} S_{\bar{l}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{l}}{\bar{t}^2} S_{\bar{t}}\right)^2}$$

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} S_{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} S_{\bar{x}_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} S_{\bar{x}_n}\right)^2}$$



Średnia Ważona (Łączenie wyników)

Dwa pomiary tej samej wielkości ze znacząco różnymi niepewnościami (dwie serie pomiarowe):

$$\begin{array}{cc} \bar{x}_A & S_{\bar{x}_A} \\ \bar{x}_B & S_{\bar{x}_B} \end{array}$$

$$\bar{x}_w = \frac{W_A \bar{x}_A + W_B \bar{x}_B}{W_A + W_B}$$

Średnia ważona

$$S_{\bar{x}_w} = \frac{1}{\sqrt{W_A + W_B}}$$

Odchylenie standardowe Średniej ważonej

$$W_A = \frac{1}{S_{\bar{x}_A}^2}$$

$$W_B = \frac{1}{S_{\bar{x}_B}^2}$$



Zapis wyników pomiarów

1. Najpierw szacujemy niepewność pomiaru
2. Niepewność zaokrąglamy do **dwóch miejsc znaczących i zawsze do góry**
3. Wartość średnią podajemy z taką samą dokładnością jak niepewność

$$\bar{g} = 9.8145467 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.21434 \frac{m}{s^2}$$

notatki

$$\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$$

Poprawne zaokrąglenie

$$g = (9.81 \pm 0.22) \text{ m/s}^2$$

Wynik Końcowy



Porównanie zmierzonych wielkości

Porównanie z wielkością tablicową

$$|\bar{x} - x_{tab}| < \Delta x$$

zgodność

Porównanie dwóch zmierzonych wielkości

$$|\bar{x}_A - \bar{x}_B| < \Delta x_A + \Delta x_B$$

zgodność



Wykresy

Najbardziej efektywny sposób przedstawienia wyników

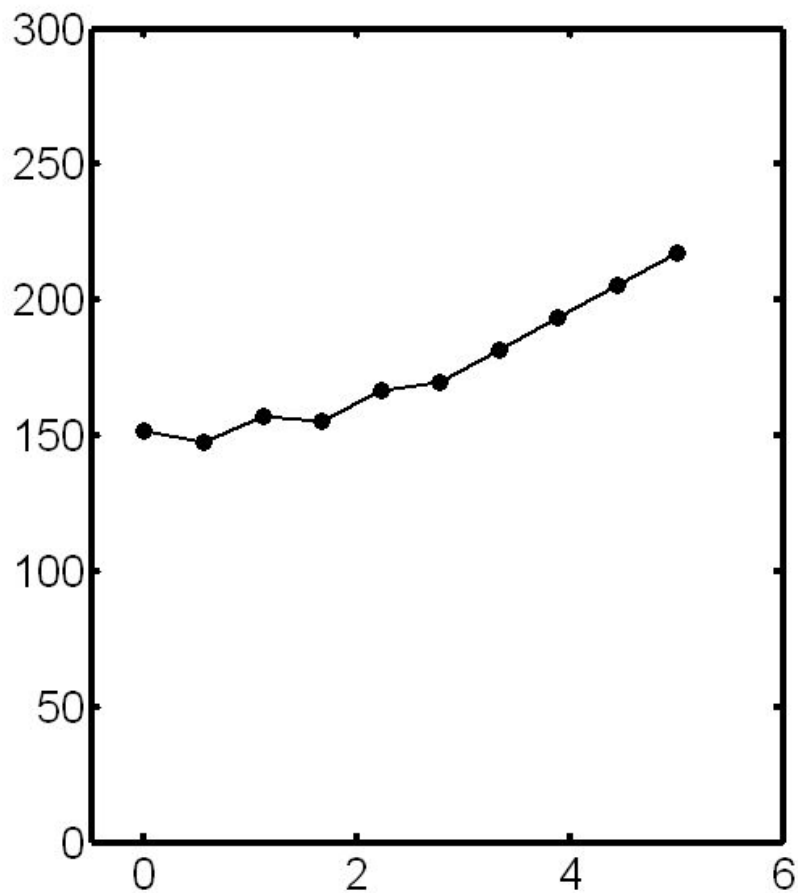
Pozwalają m.in. na:

- Oglądowe przedstawienie wyników
- Wyznaczenie zależności między zmierzonymi wielkościami
- Testowanie modeli
- Oszacowanie wielkości fizycznych

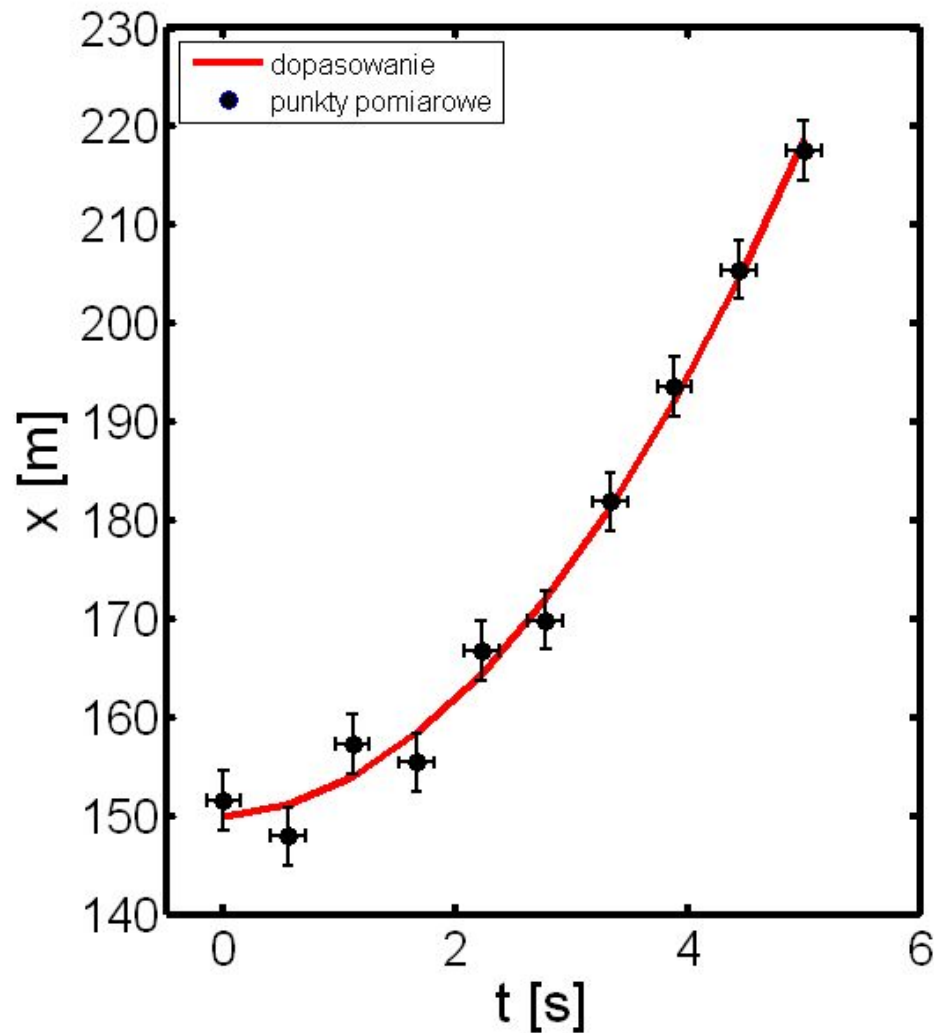


Wykresy

Źle



Dobrze

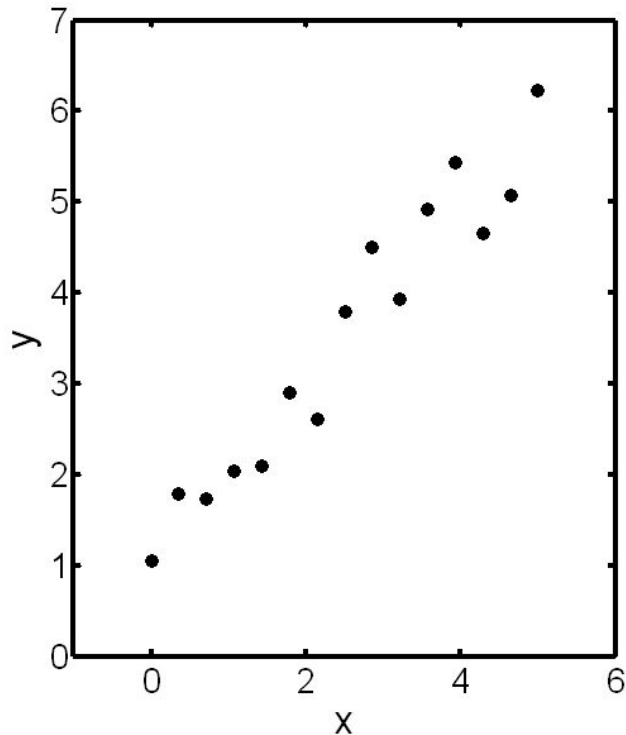




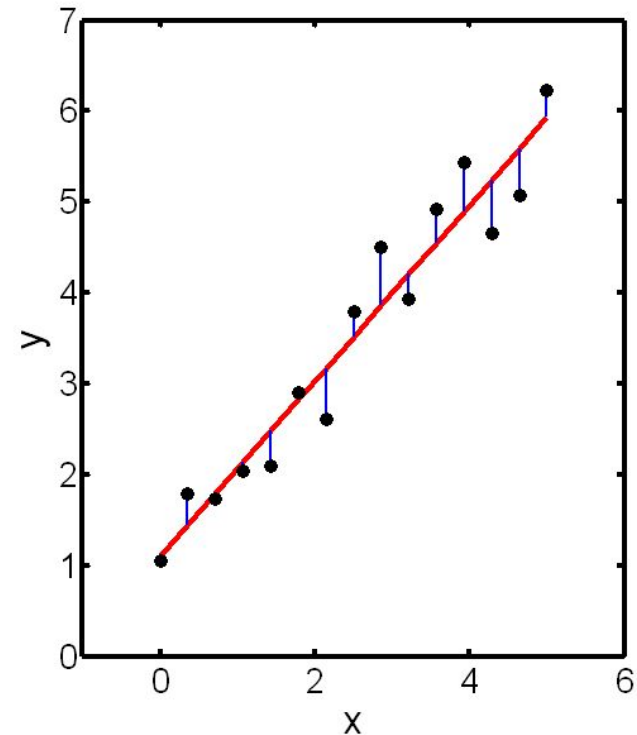
Regresja Liniowa

Badanie związku między dwoma wielkościami związanymi zależnością liniową

$$(x_i, y_i)$$



$$y = ax + b$$





Regresja Liniowa

Badanie związku między dwoma wielkościami związanymi zależnością liniową

$$(x_i, y_i)$$

$$y = ax + b$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$S_a = \sqrt{\frac{n \sum_{i=1}^n y_i^2 - a \sum_{i=1}^n x_i y_i - b \sum_{i=1}^n y_i}{n-2} \frac{1}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}}$$

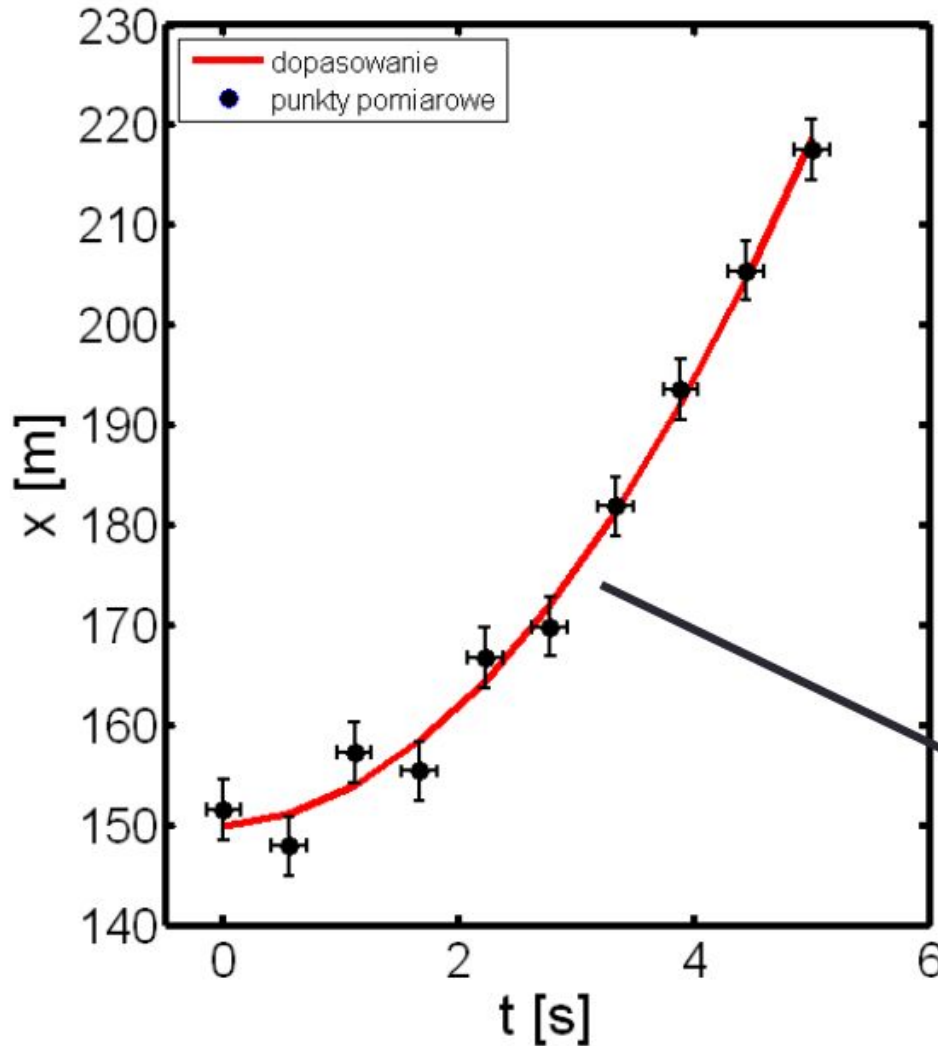
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$S_b = S_a \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}}$$

Można wyliczyć na kartce
lub na komputerze
np. program Origin



Inne Zależności Funkcyjne



$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$$

a, V_0, x_0



Literatura

- **I Pracownia fizyczna , red. A. Magiera, OWI Kraków 2006**
- H. Szydłowski, Pracownia fizyczna, PWN Warszawa 1999
- A. Zięba, Postępy Fizyki, tom 52, zeszyt 5, 2001, str.238-247
- B. Kamys, Statystyczne Metody Opracowania Pomiarów I
(http://users.uj.edu.pl/~ufkamys/BK/smop1N_h.pdf)

Programy do opracowywania danych

- Excel
- Mathematica
- Statistica
- Matlab
- **Origin**