UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Statystyczne Metody Opracowania Wyników Pomiarów

dla studentów
ZMIN

Teresa Jaworska-Gołąb

2017/18

Co czytać

[1] *I Pracownia fizyczna,* Andrzej Magiera red. , Oficyna Wydawnicza IMPULS, Kraków 2006; *http://www.1pf.if.uj.edu.pl/materialy/zalecana-literatura*

[2] H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, PWN, Warszawa 1999.

[3] A. Zięba, *Analiza danych w naukach ścisłych i technice*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2013.

[4] J. R. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, W-wa 1999.

[5] G. L. Squires, *Praktyczna fizyka*, PWN, Warszawa 1992.

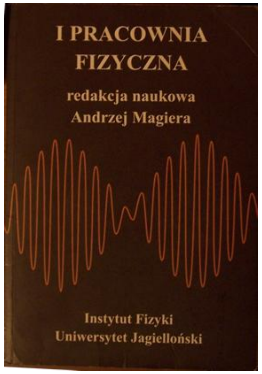
[6] *http://users.uj.edu.pl/~ufkamys/BK/smop1.htm*

[7] *http://www.1pf.if.uj.edu.pl/materialy/analiza-niepewnosci-pomiarowych*

[8] *http://www.fis.agh.edu.pl/~pracownia_fizyczna/index.php?p=pomoce*

[9] D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy Fizyki,* Wydawnictwo Naukowe PWN, W-wa 2003.

[10] *http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html*



Czym są i czemu służą zajęcia w I PF

SAMODZIELNE WYKONYWANIE EKSPERYMENTÓW I POMIARÓW FIZYCZNYCH
oraz
OPRACOWANIE ICH WYNIKÓW

I. Obserwacja zjawisk i efektów fizycznych.

II. Nauka obsługi wybranych przyrządów pomiarowych.

III. Nauka podstaw planowania i opracowania wyników pomiarów, czyli:

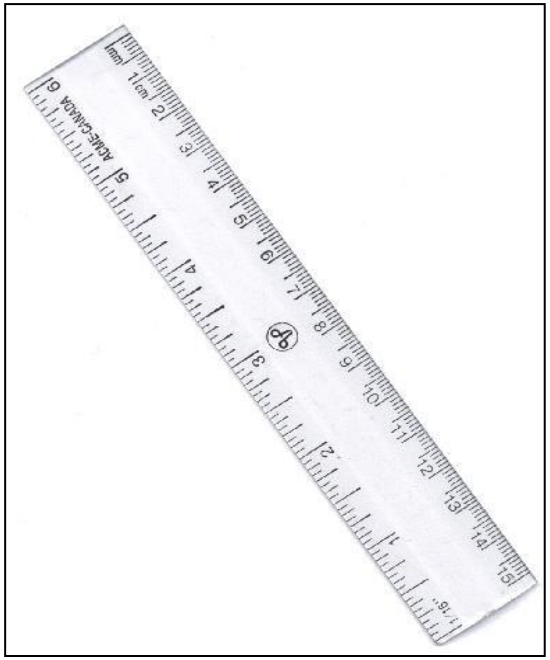
- poprawnego wyznaczania wielkości fizycznych,
- pomiaru zależności fizycznych i ich opisu,
- poprawnej prezentacji wyników.

Niniejszy wykład stanowi wstęp do trzeciego punktu

Rodzaje pomiarów 1/2

Pomiar bezpośredni

pomiar, w którym konkretna wielkość fizyczna mierzona jest <u>bezpośrednio</u> przy pomocy określonego przyrządu



<u>Przykłady:</u>

- pomiar długości linijką
- pomiar czasu stoperem

Rodzaje pomiarów 2/2

Pomiar pośredni

Pomiar, w którym dana wielkość fizyczna
mierzona jest pośrednio
poprzez pomiar innych wielkości fizycznych

Przykład:
pomiar prędkości poprzez pomiar drogi (linijka) i czasu (stoper)

$$v = \frac{s}{t}$$

Jak dokładne są nasze pomiary?

Niepewności i błędy

Żaden pomiar (nawet najstaranniejszy) **nie jest doskonały**,
obarczony jest
niepewnością pomiarową a może i błędem
ma skończoną dokładność !!!

Podając **wynik pomiaru** należy podać:

wartość wielkości mierzonej, niepewność pomiarową i jednostkę

!!! wszystkie trzy !!!

Wynik pomiaru ***bez podania niepewności pomiarowej*** jest bezwartościowy.

Zapis wyników pomiarowych 1/2

Podajemy **najwyżej dwie cyfry znaczące niepewności**,

a jeżeli zaokrąglenie do jednej cyfry nie zmieni wyznaczonej wartości więcej niż o 10% (lub 20%) to podaje się <u>tylko jedną cyfrę</u>

Niepewności zaokrąglamy zawsze „w górę”

0.2

0.11

Wynik pomiaru obliczamy o jedno miejsce dziesiętne dalej niż miejsce dziesiętne niepewności, a następnie zaokrąglamy wg. normalnych reguł do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego zaokrąglono niepewność pomiarową.

$$m = (100.021 \pm 0.012)\ \mathrm{g}$$

Zapis wyników pomiarowych 2/2

Wyniki pomiarów i obliczeń najlepiej podawać w jednostkach, dla których **wartość liczbowa** zawarta jest przedziale **od 0,01 do 1000**.

Można używać:

przedrostków (μ, m, M, G itd.) lub

notacji potęgowej ($2x10^{-6}$, $2x10^{-3}$, $2x10^{6}$, $2x10^{9}$)

I = 0.00003121 A ± 0.00000012 A

źle

I = (31.21 ± 0.12) μA

I = (31.21 ± 0.12) x 10^{-6} [A]

Statystyczny model błędu pomiaru

błąd pomiaru

wartość zmierzona – wartość rzeczywista

 # rozumiany jest jakościowo: pomyłka, błędny odczyt itp. lub jako
 # pojedyncza realizacja zmiennej losowej,

nie jest przedmiotem rachunku niepewności pomiaru

niepewność pomiaru

parametr związany z rezultatem pomiaru wielkości mierzonej
charakteryzuje rozrzut wyników, jaki można (w sposób uzasadniony) jej przypisać

Międzynarodowa Norma

Błąd i niepewność pomiaru 2/2

Błąd pomiarowy (błąd gruby) wynika z błędu popełnionego w czasie pomiaru lub odczytu. Źródłem błędu może być eksperymentator (np. cm zamiast cal, nieumiejętność obsługi aparatury) lub przyrząd (np. awaria).

Wyniki obarczone błędem grubym odrzucamy (powtarzamy pomiar).

Błąd przybliżenia (np. przybliżony model opisujący badane zjawisko)

Niepewność pomiaru

Niepewność przypadkowa **(niepewność typu A)**
– powodowana przez wiele niezależnych przyczyn o porównywalnym wpływie na wynik lub sam charakter badanego procesu/zjawiska (np. rozpad promieniotwórczy)

Niepewność systematyczna **(niepewność typu B)**
– powodowana przez skończoną dokładność przyrządów pomiarowych lub przez systematyczny błąd urządzenia mierzącego (np. źle wyskalowana miarka)

Ocena niepewności

Ocena niepewności

typu A wynika z **Analizy statystycznej** serii pomiarów

typu B wykorzystuje metody inne niż analiza statystyczna

Ocena niepewności typu B może być stosowana w każdej sytuacji.

Ocena niepewności typu A *wymaga sprawdzenia*
(przy pomocy oceny typu B),
że seria pomiarowa nie jest obciążona znaczącą składową systematyczną.

Przykład:
Pomiar długości ołówka linijką

Międzynarodowa Norma nie neguje tradycyjnego rozróżnienia na niepewność przypadkową i niepewność systematyczną.

Niepewności pomiarowe - przykład

przedmiot, linijka A, linijka B

– wyniki pomiarów długości przedmiotu linijką A – podziałka 1mm:

30, 31, 29, 32, 31, 28, 30,…

– wyniki pomiarów długości przedmiotu linijką B – podziałka 1mm:

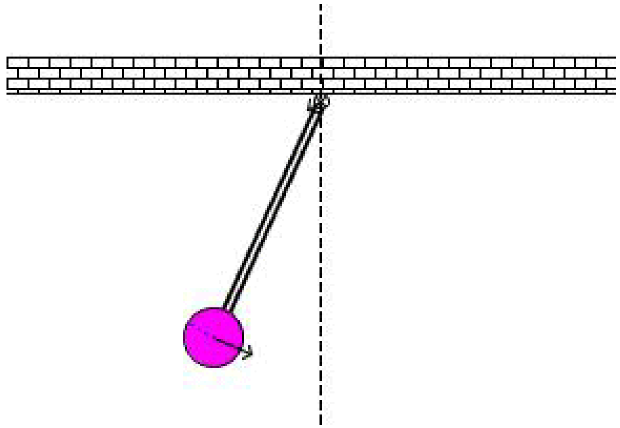
33, 31, 34, 35, 32, 34, 33,…

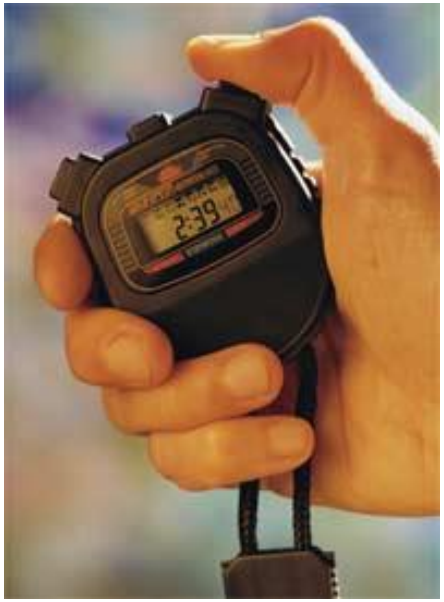
Oba pomiary są obarczone **niepewnością przypadkową**
obserwujemy rozrzut wyników wokół określonej wartości

Serie pomiarów różnią się: jedna z linijek jest źle wyskalowana wprowadzając **niepewność systematyczną**

Niepewności systematyczne mogą być trudne do wykrycia, interpretacji i eliminacji.

Pomiar okresu drgań wahadła

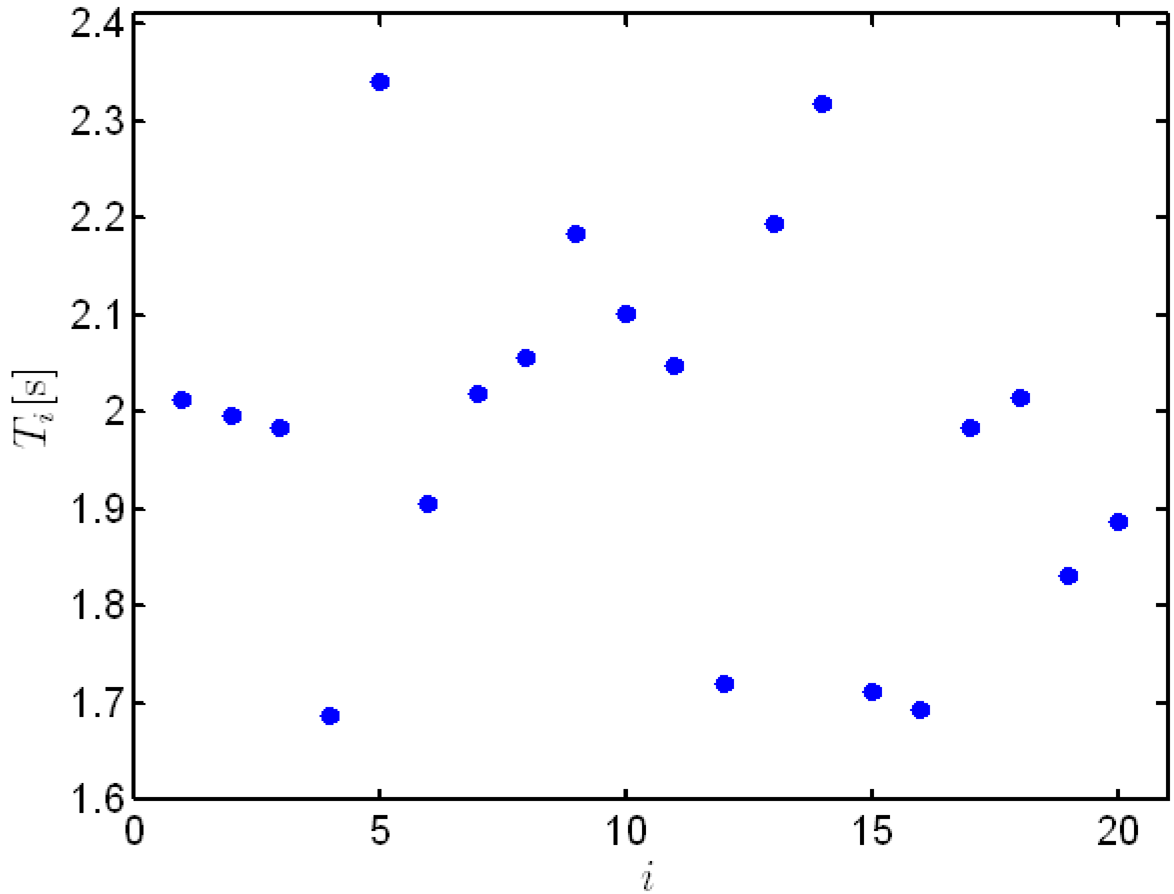




- Dokładny stoper (0.01s)
- Czas reakcji człowieka jest rzędu 0.2s

Wyniki kolejnych pomiarów okresu

i-ty pomiar	T_i [s]
1	2.01
2	2.00
3	1.98
4	1.69
5	2.34
6	1.91
7	2.02
8	2.06
9	2.18
10	2.10
11	2.05
12	1.72
13	2.19
14	2.32
15	1.71
16	1.69
17	1.99
18	2.02
19	1.83
20	1.89

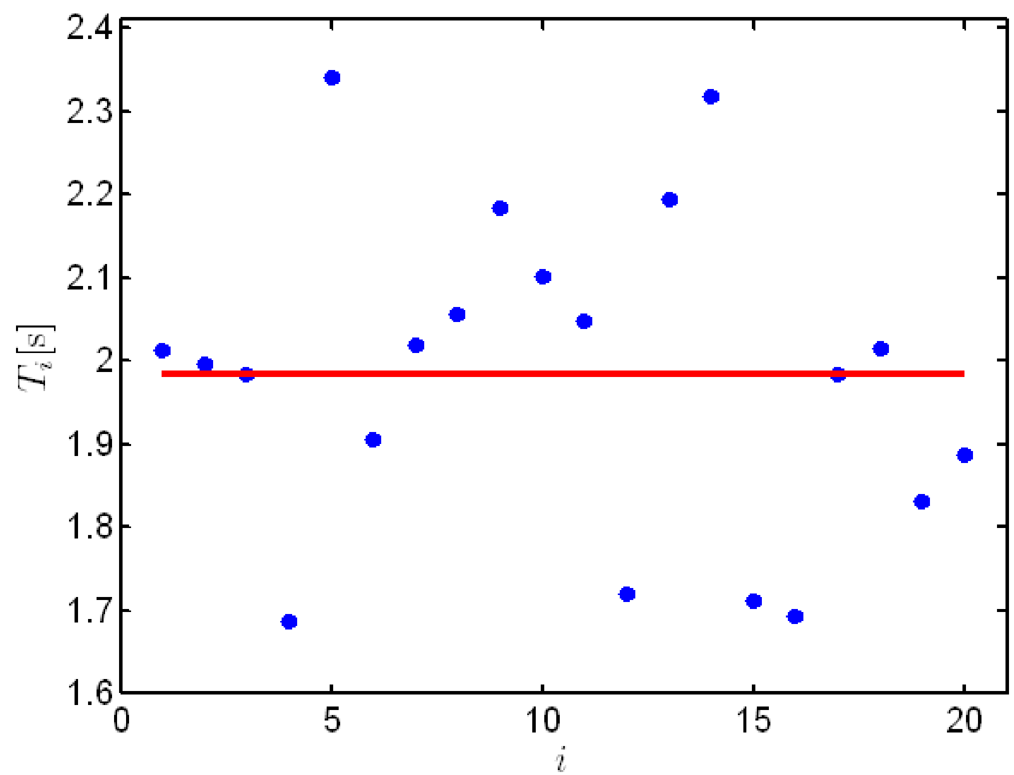


Naszym zadaniem jest podanie wyniku i jego niepewności

Wynik pomiaru – średnia arytmetyczna

Wielkością najbardziej zbliżoną do wartości rzeczywistej (estymatorem wartości oczekiwanej) jest średnia arytmetyczna pomiarów:

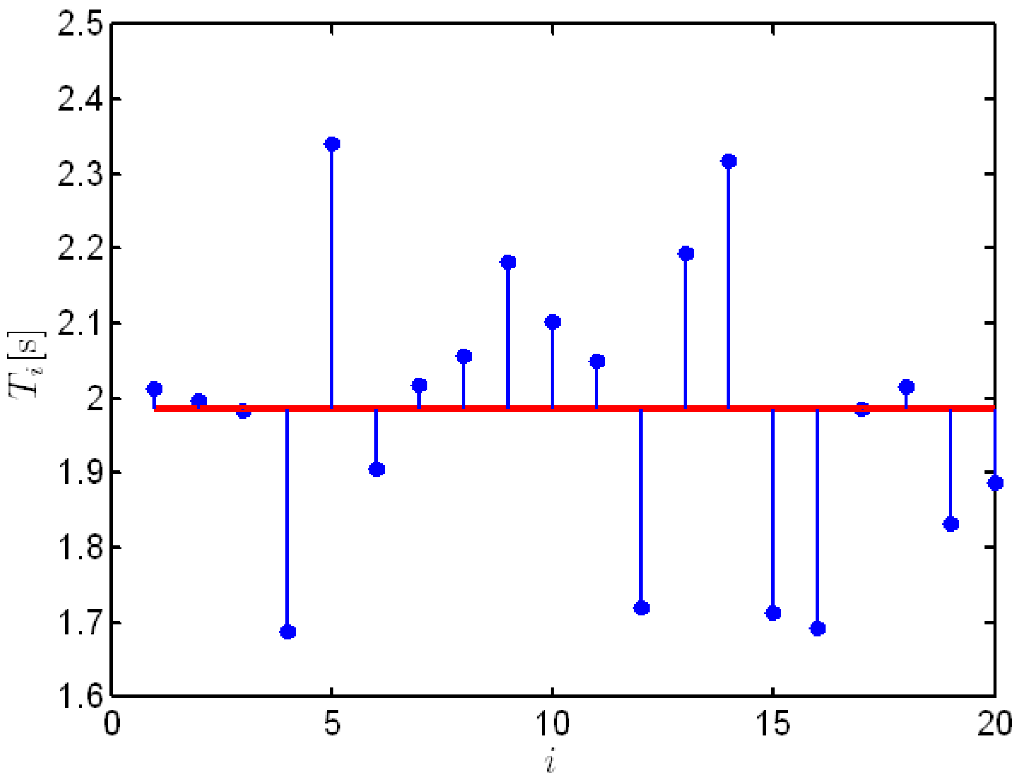
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$



Niepewność pojedynczego pomiaru

Wielkością najlepiej opisującą **niepewność pojedynczego pomiaru** jest **odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru**:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$



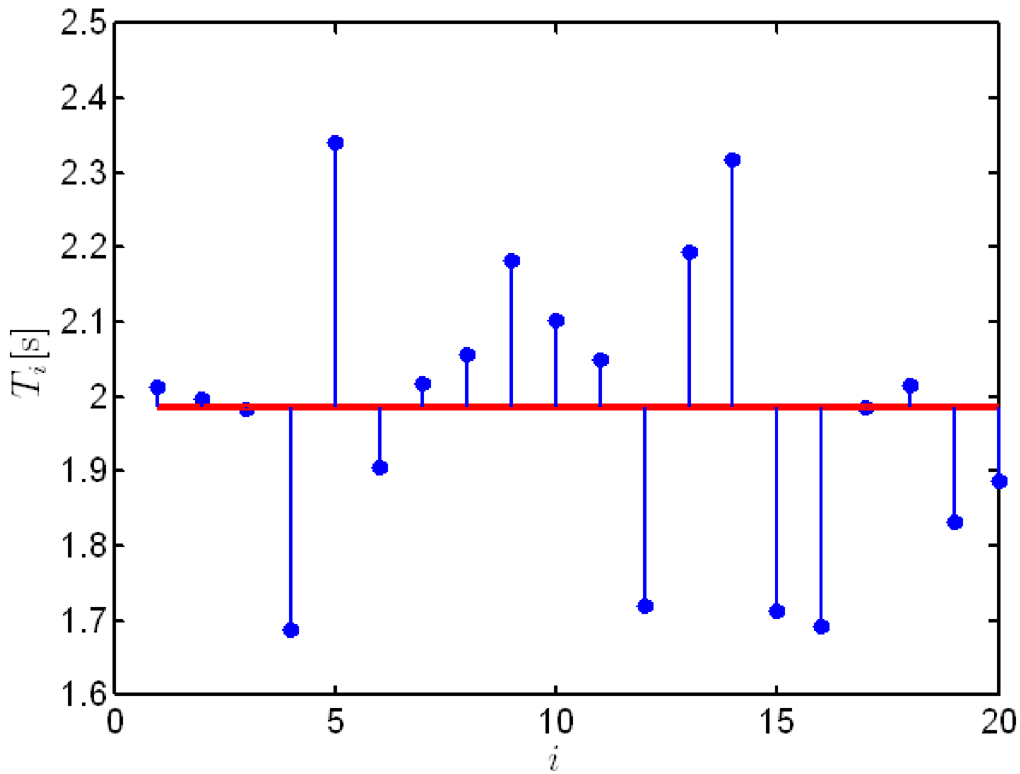
Niepewność wyniku – niepewność średniej arytmetycznej

Wielkością najlepiej opisującą niepewność wyniku jest **odchylenie standardowe średniej arytmetycznej**

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

$$S_{\bar{x}} < S_x$$

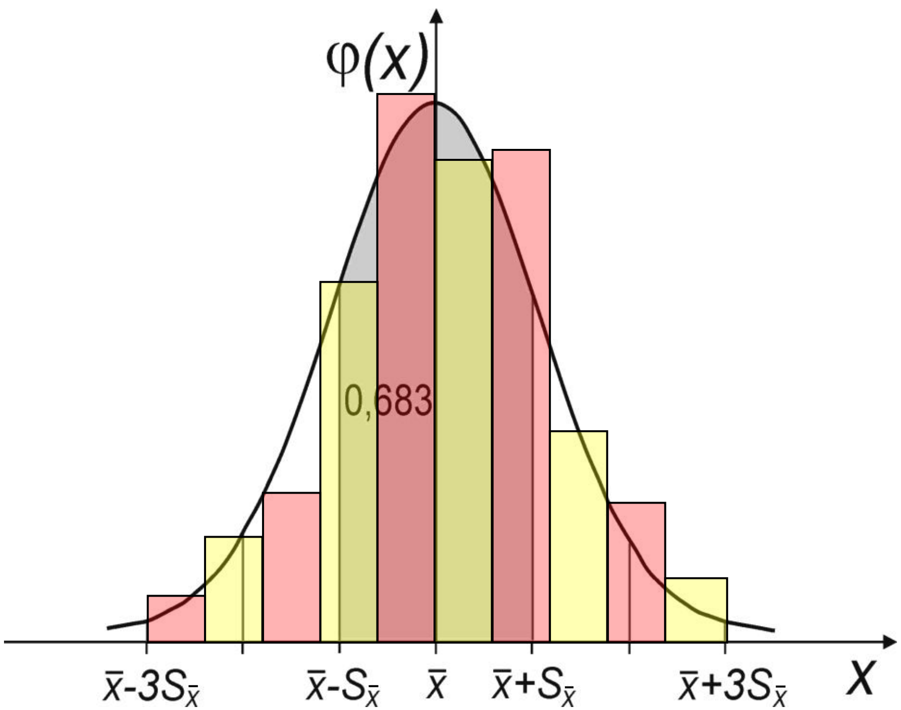


$S_{\bar{x}}$ można zmniejszać zwiększając liczbę pomiarów *n*

Rozkład Gaussa

Dla niepewności przypadkowych rozkład wielkości mierzonych wokół wartości prawdziwej dany jest **rozkładem Gaussa**

$$\varphi_{(\bar{x},S_x)}(x) = \frac{1}{S_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\bar{x})^2/2S_{\bar{x}}^2}$$



Prawdziwa wartość mierzonej wielkości utożsamiana z wartością oczekiwaną.

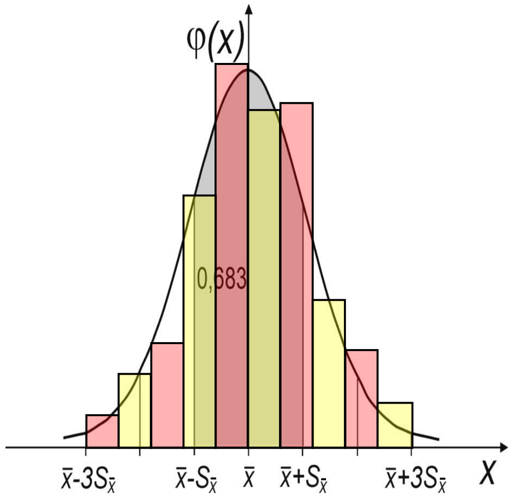
W przedziale $(x - S_{\bar{x}},\ x + S_{\bar{x}})$ mieści się **68,3%** wszystkich wyników.

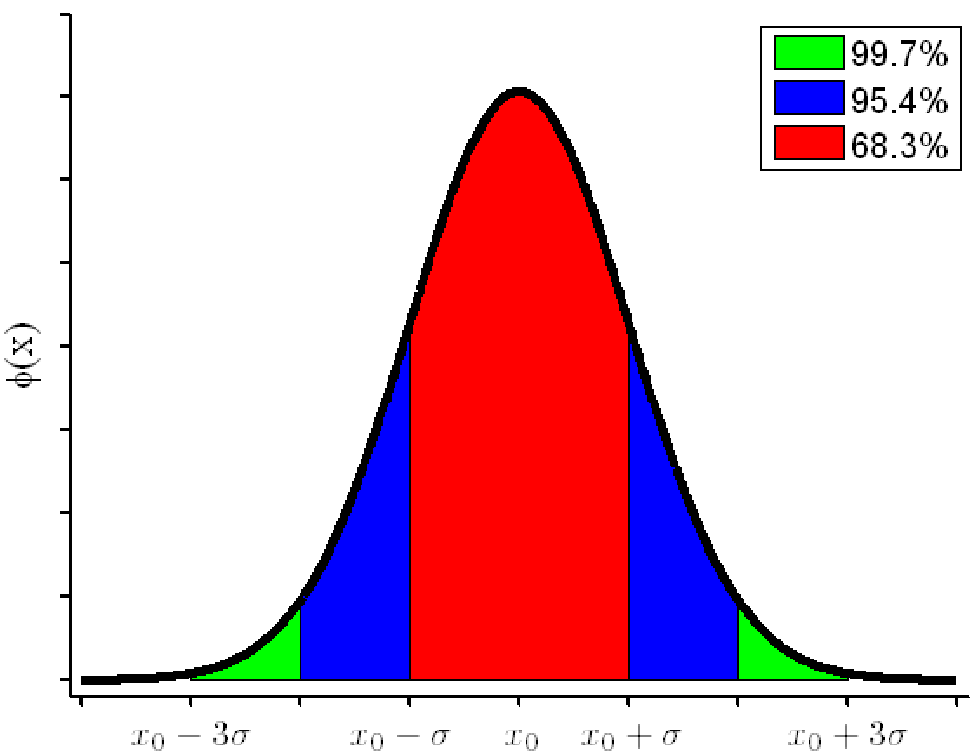
W przedziale $(x - 3S_{\bar{x}},\ x + 3S_{\bar{x}})$ mieści się **99,8%** wszystkich wyników.

UWAGA!!!
Przy skończonej liczbie pomiarów parametry rozkładu można tylko estymować (przybliżać).

Rozkład Gaussa cd.

Analiza statystyczna niepewności przypadkowych dużej serii pomiarowej





Niepewność statystyczna małych serii pomiarów

Dla małej liczby pomiarów: $n \leq 10$ $S_{\bar{x}}$ daje zaniżoną wartość niepewności

$$S_{\bar{x}} \rightarrow t_{n,\alpha} S_{\bar{x}}$$

$t_{n,\alpha}$ → Współczynnik Studenta

n → Liczba pomiarów

α → Poziom ufności

Poziom ufności – prawdopodobieństwo z jakim wyznaczony przedział zawiera wartość rzeczywistą mierzonej wielkości.

n	α=0.6828	α=0.95	α=0.99
2	1.837	12.706	63.657
3	1.321	4.303	9.926
4	1.197	3.182	5.841
5	1.141	2.776	4.604
6	1.11	2.58	4.032
7	1.09	2.447	3.707
8	1.077	2.365	3.5
9	1.066	2.306	3.355
10	1.059	2.252	3.25

Zapis niepewności (zaokrąglanie)

0.2

0.11

- Podaje się nie więcej niż **dwie cyfry znaczące** estymatora niepewności. Liczymy co najmniej trzy i **zaokrąglamy zawsze do góry**.

- Wynik pomiaru obliczamy o co najmniej jedno miejsce dziesiętne dalej niż miejsce dziesiętne, na którym zaokrąglono niepewność, a następnie zaokrąglamy wg. normalnych reguł do tego samego miejsca dziesiętnego, do którego zaokrąglono niepewność.

notatki $\Rightarrow$ $\bar{g} = 9.8145467 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.21434 \frac{m}{s^2}$

sprawozdanie $\Rightarrow$ $\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$

źle $\Rightarrow$

$\bar{g} = 9.814 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22 \frac{m}{s^2}$

$\bar{g} = 9.81 \frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.214 \frac{m}{s^2}$

Zapis niepewności (w prezentacji wyników)

Z użyciem odchylenia standardowego (poziom ufności 68%)

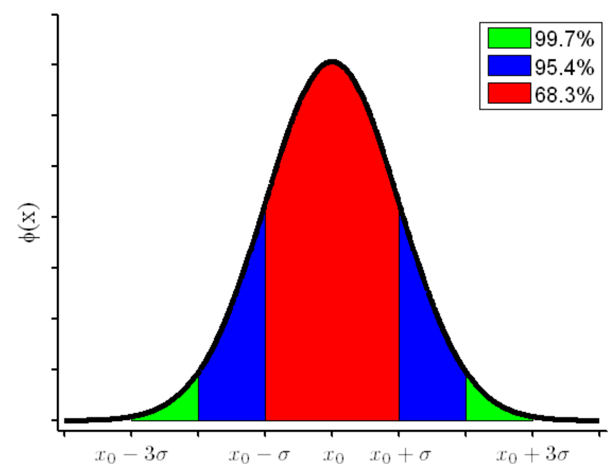
$$\bar{g} = 9.81\frac{m}{s^2} \quad S_{\bar{g}} = 0.22\frac{m}{s^2}$$

albo

$$g = 9.81(22)\frac{m}{s^2}$$

Z użyciem symbolu „ ± ”

$$g = (9.81 \pm 0.44)\frac{m}{s^2}$$



Uwaga!
Symbol „ ± ” (najczęściej używany w medycynie, przemyśle, instrukcjach) zarezerwowany jest dla **niepewności rozszerzonej**. Z grubsza: **dla poziomu ufności co najmniej 95%.** Używając go podajemy dwa lub trzy razy szerszy przedział niepewności (lub uwzględniamy odpowiedni współczynnik Studenta).

Średnia ważona

Dwa pomiary tej samej wielkości: $\bar{x}_A \; S_{\bar{x}_A}$ oraz $\bar{x}_B \; S_{\bar{x}_B}$

Definiujemy wagi:

$$w_A = \frac{1}{s^2_{\bar{x}_A}} \quad \text{oraz} \quad w_B = \frac{1}{s^2_{\bar{x}_B}}$$

Średnia ważona i jej niepewność

$$\bar{x}_w = \frac{w_A \bar{x}_A + w_B \bar{x}_B}{w_A + w_B}$$

$$S_{\bar{x}_w} = \frac{1}{\sqrt{w_A + w_B}}$$

Najpierw trzeba sprawdzić zgodność wyników (!)

[zob. Taylor]

Np. mogę uśrednić pomiary

$\bar{x}_A$ = 112(3) i $\bar{x}_B$ = 108(5)

czy nawet

$\bar{x}_A$ = 112(3) i $\bar{x}_B$ = 135(5)

ale dla

$\bar{x}_A$ = 112(3) i $\bar{x}_B$ = 68(5)

jest problem.

Niepewność w pomiarach pośrednich

Przykład:
Wyznaczanie prędkości średniej.

$$v = \frac{s}{t}$$

Propagacja niepewności pomiarowych 2/5

W pomiarach pośrednich **znamy funkcje** opisujące związek pomiędzy poszukiwaną wielkością z i mierzonymi bezpośrednio wielkościami $X_1, X_2, \dots X_n$

$$z = f\left(X_1, X_2, \dots X_n\right)$$

np. $$v = \frac{l}{t}$$

Wartość oczekiwana tej wielkości jest funkcją wartości oczekiwanych poszczególnych zmiennych

$$\bar{z} = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots \bar{X}_n)$$

np. $$\bar{v} = \frac{\bar{l}}{\bar{t}}$$

Odchylenie standardowe szukanej wielkości jest funkcją odchyleń wielkości mierzonych

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1} S_{\bar{X}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} S_{\bar{X}_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_n} S_{\bar{X}_n}\right)^2}$$

np. $$S_{\bar{v}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{t}} S_{\bar{l}}\right)^2 + \left(-\frac{\bar{l}}{\bar{t}^2} S_{\bar{t}}\right)^2}$$

Niepewność maksymalną szukanej wielkości możemy znaleźć metodą różniczki zupełnej

$$\Delta\bar{z} = \left|\frac{\partial f}{\partial X_1}\right| \Delta X_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial X_2}\right| \Delta X_2 + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial X_n}\right| \Delta X_n$$

np. $$\Delta_{\bar{v}} = \left|\frac{1}{\bar{t}}\right| \Delta_{\bar{l}} + \left|-\frac{\bar{l}}{\bar{t}^2}\right| \Delta_{\bar{t}}$$

Niepewność w pomiarach pośrednich

I. Dla sumy i różnicy

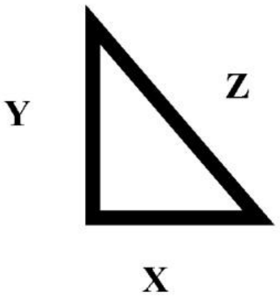
$$z = x \pm y \qquad \bar{z} = \bar{x} \pm \bar{y}$$

$$\Delta z = \Delta x + \Delta y$$

Niepewności systematyczne
Niepewności maksymalne

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{{S_{\bar{x}}}^2 + {S_{\bar{y}}}^2}$$

Niepewności przypadkowe



$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

Pomiary pośrednie (opisane funkcją wielu zmiennych niezależnych)

Niepewność w pomiarach pośrednich

II. Dla iloczynu i ilorazu

$$z = xy \qquad \bar{z} = \bar{x}\bar{y} \qquad\qquad z = \frac{x}{y} \qquad \bar{z} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

$$\frac{\Delta z}{|z|} = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$$

Niepewności systematyczne
Niepewności maksymalne

$$\frac{S_{\bar{z}}}{|z|} = \sqrt{\left(\frac{S_{\bar{x}}}{x}\right)^2 + \left(\frac{S_{\bar{y}}}{y}\right)^2}$$

Niepewności przypadkowe

Pomiary pośrednie (opisane funkcją wielu zmiennych niezależnych)

Forma wyniku końcowego

Niepewność statystyczna i systematyczna mają różny charakter:

- niepewność statystyczna oddaje szerokość rozkładu prawdopodobieństwa,
- niepewność systematyczna jest miarą maksymalnego (niekontrolowanego) odchylenia wyniku pomiaru od wartości rzeczywistej.

Z tego powodu **zaleca się** podawanie obu rodzajów niepewności niezależnie:

$$z = \bar{z} \pm S_{\bar{z}} \pm \Delta z \quad [\, jednostka \,]$$

Czasami jednak, zwłaszcza gdy chcemy porównać dwa wyniki, podaje się tzw. **niepewność całkowitą**.

Całkowita niepewność standardowa:

$$S_{\bar{z}}^{tot} = \sqrt{S_{\bar{z}}^2 + \frac{(\Delta z)^2}{3}}$$

Całkowita niepewność maksymalna:

$$\Delta \bar{z} = 3S_{\bar{z}} + \Delta z$$

Graficzne przedstawianie wyników

Dlaczego wyniki warto przedstawiać na wykresach?

Na wykresie łatwiej wychwycić
empiryczne relacje między badanymi wielkościami.

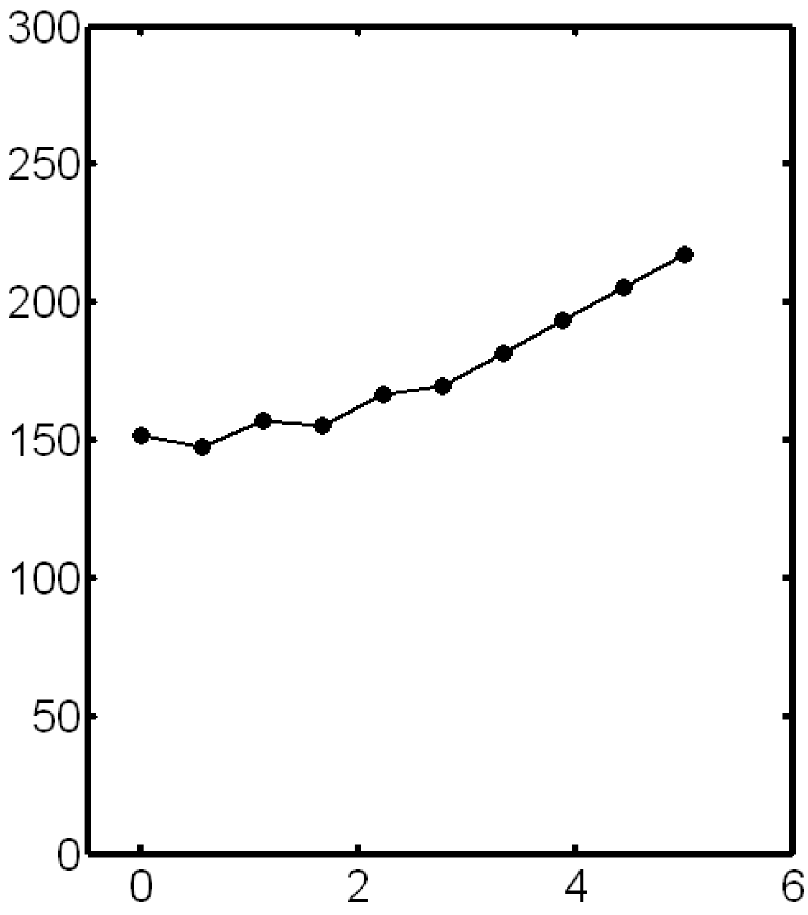
Graficzne przedstawienie wyników niejednokrotnie pozwala na wyznaczenie szukanych wielkości.

$$\boxed{s = vt}$$

Jak zrobić dobry wykres? 1/7

$$x = x(t)$$

$$(t_i, x_i)$$

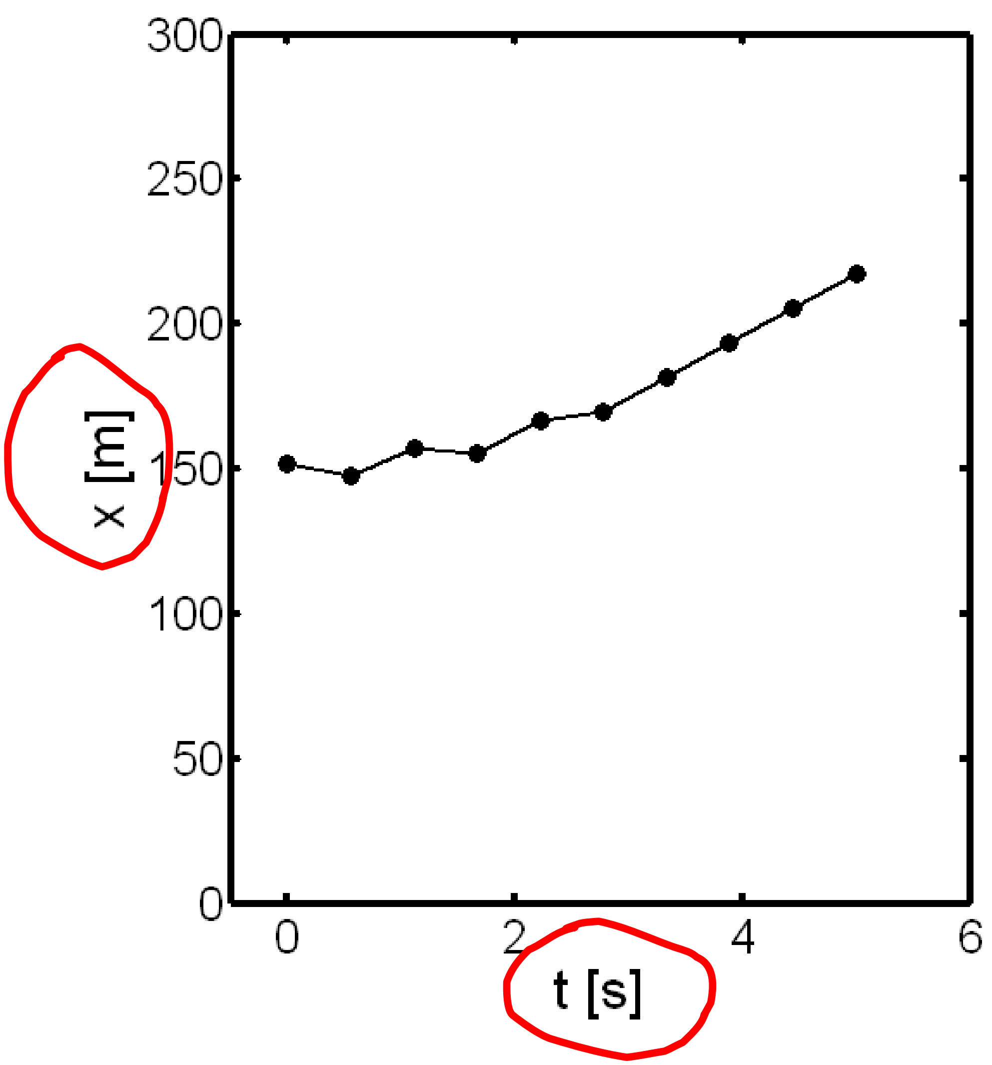


czy ten *wykres* jest dobry?

Jak zrobić dobry wykres? 2/7

$$x = x(t)$$

$$(t_i, x_i)$$

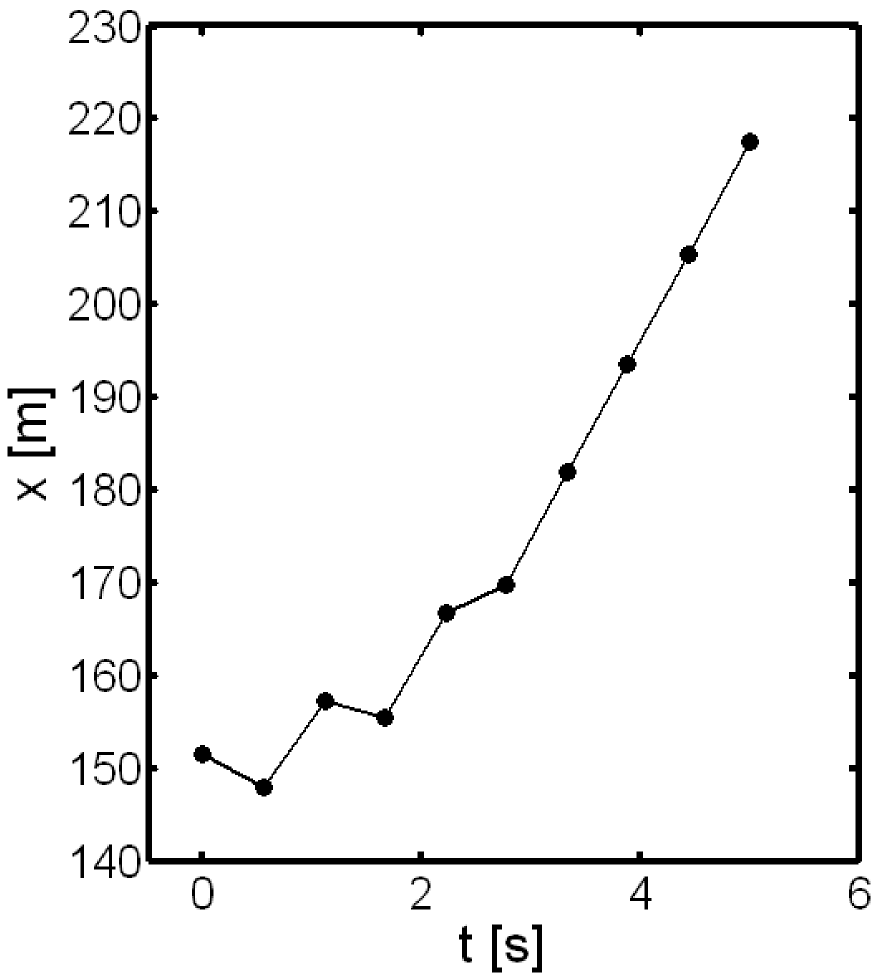


czy ten wykres jest już dobry?

Jak zrobić dobry wykres?

$$x = x(t)$$

$$(t_i, x_i)$$

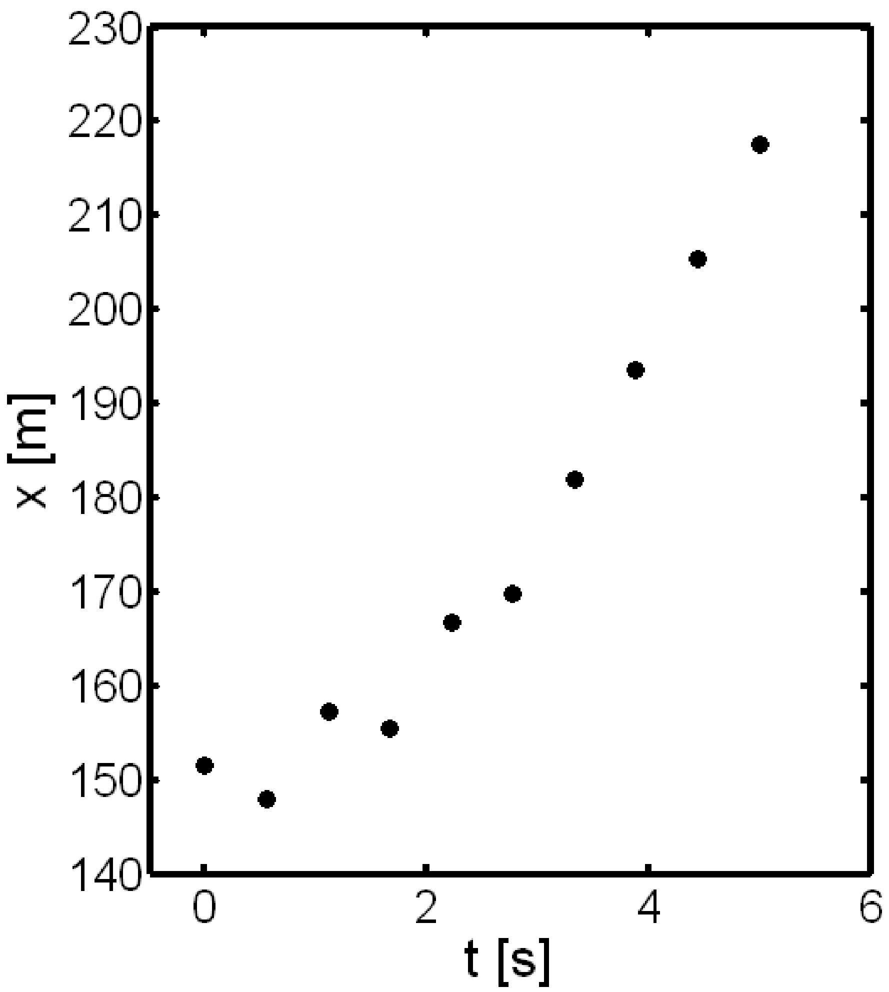


czy ten wykres jest już dobry?

Jak zrobić dobry wykres? 4/7

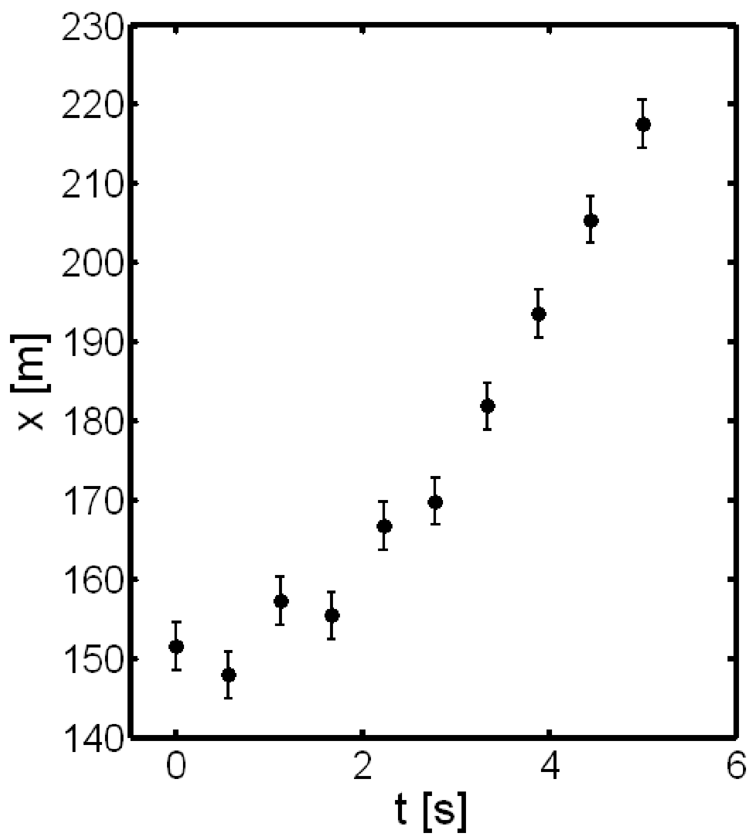
$$x = x(t)$$

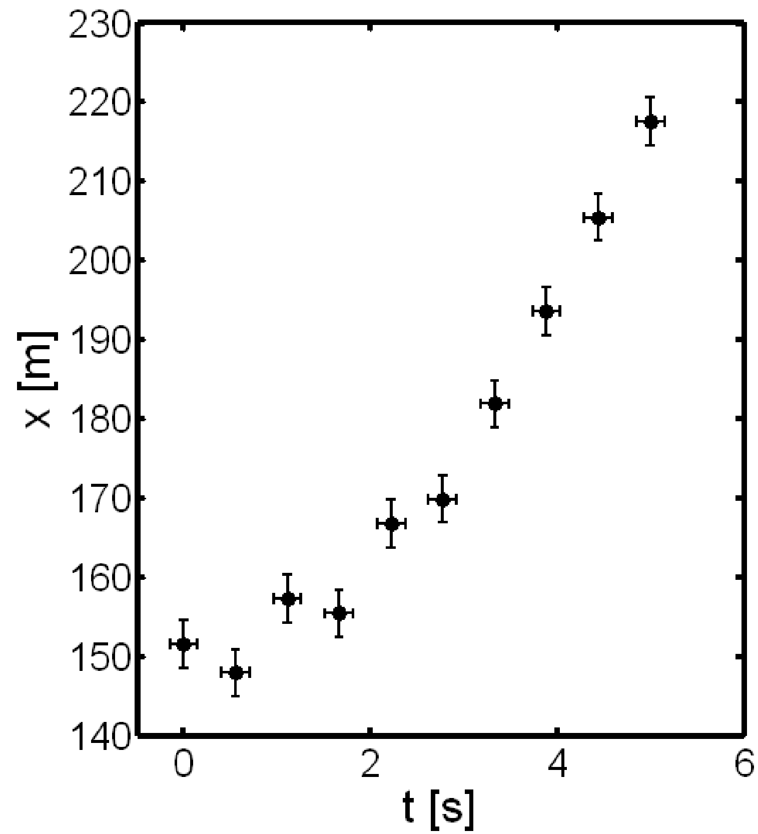
$$(t_i, x_i)$$



czy ten wykres jest już dobry?

Jak zrobić dobry wykres?



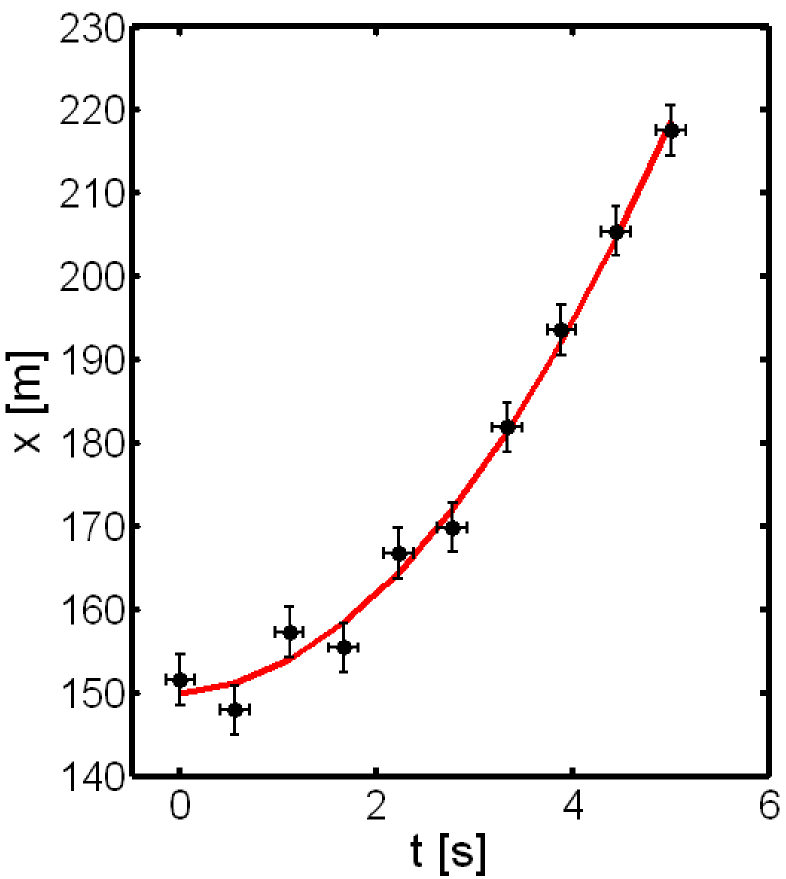


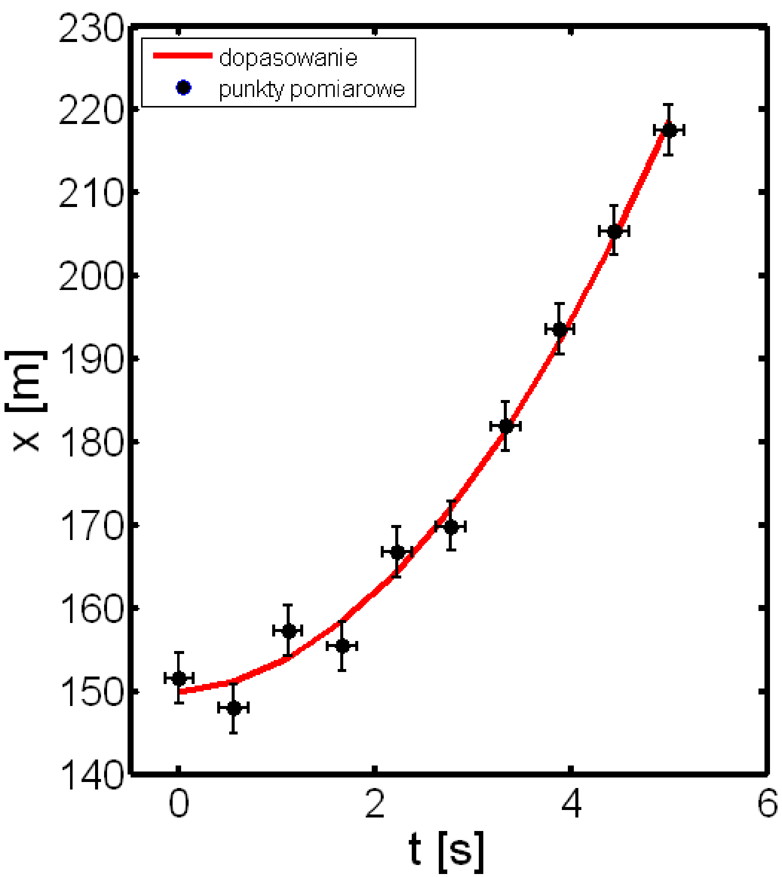
$$x = x(t)$$

$$(t_i, x_i)$$

czy ten wykres jest już dobry?

Jak zrobić dobry wykres? 6/7

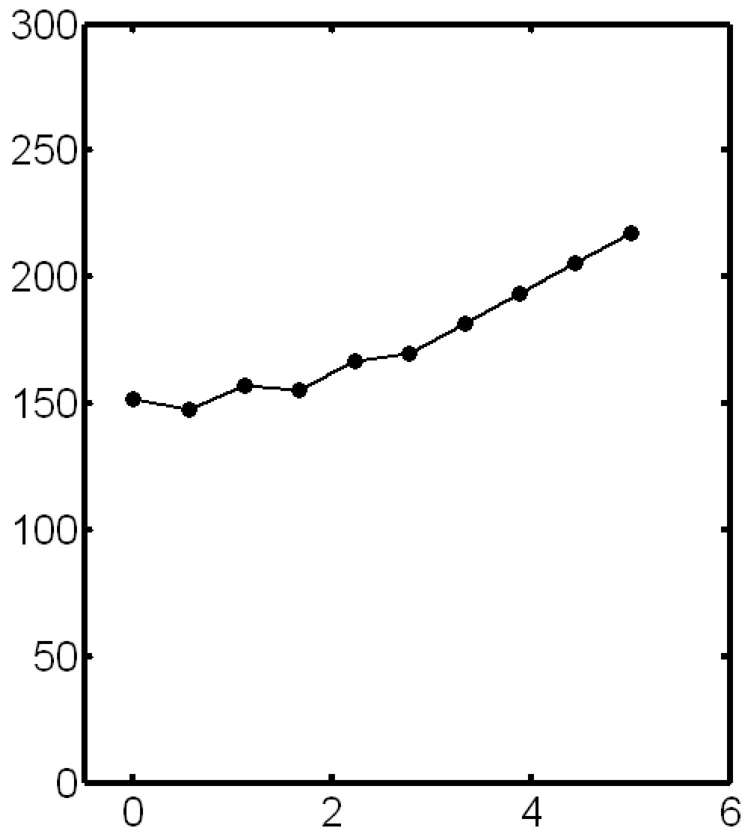




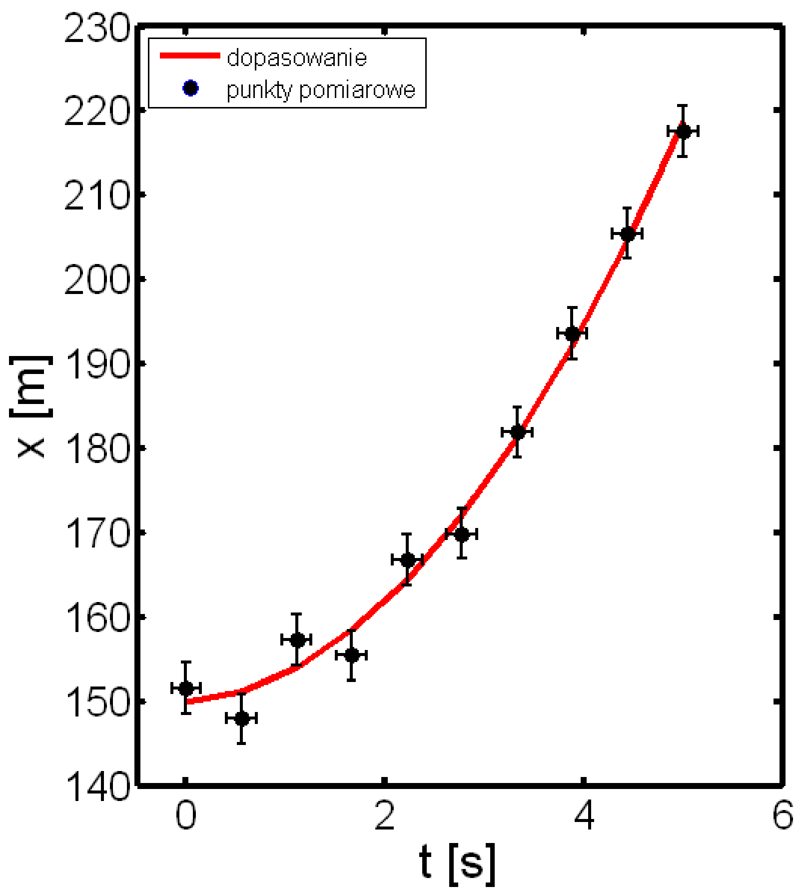
ten wykres jest już dobry

Jak zrobić dobry wykres? 7/7

Porównajmy:



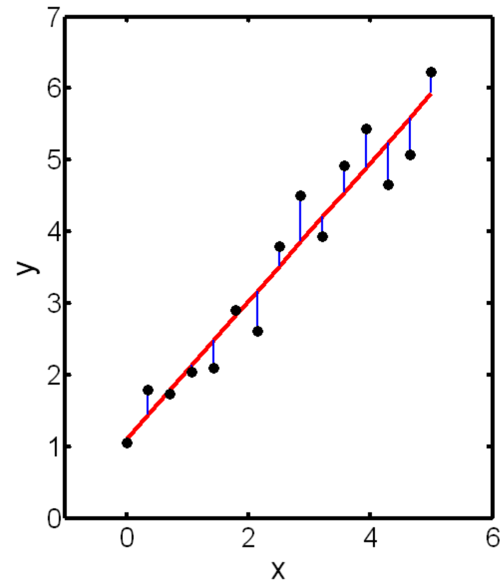
źle



dobrze

Regresja liniowa

metoda pozwalająca na zbadanie związku pomiędzy mierzonymi wielkościami i wyznaczenie parametrów dopasowania wraz z niepewnościami



$$\boxed{s = vt}$$

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Regresja liniowa 2/4

obecnie zwykle rozumiana jako metoda najmniejszych kwadratów

pomiary (x_i, y_i)

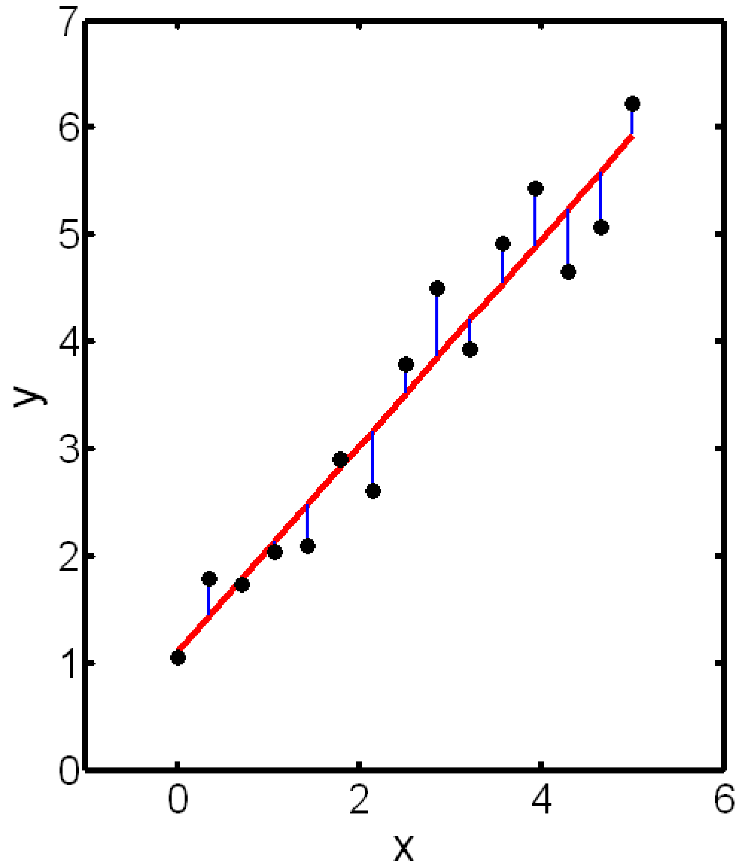
model np.: $y(t) = ax + b$

[a,b –parametry]

Metoda minimalizacji odchyleń:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{[y_i - y(x_i)]^2}{S_{y_i}{}^2} = min$$

$$\chi^2 \propto \sum_{i=1}^{n} [y_i - ax_i - b)]^2$$



Najprostszy model:
zależność liniowa bez wag

Regresja liniowa 3/4

Wartości oczekiwane parametrów i ich niepewności

$$\bar{a}, S_{\bar{a}} \quad \bar{b}, S_{\bar{b}}$$

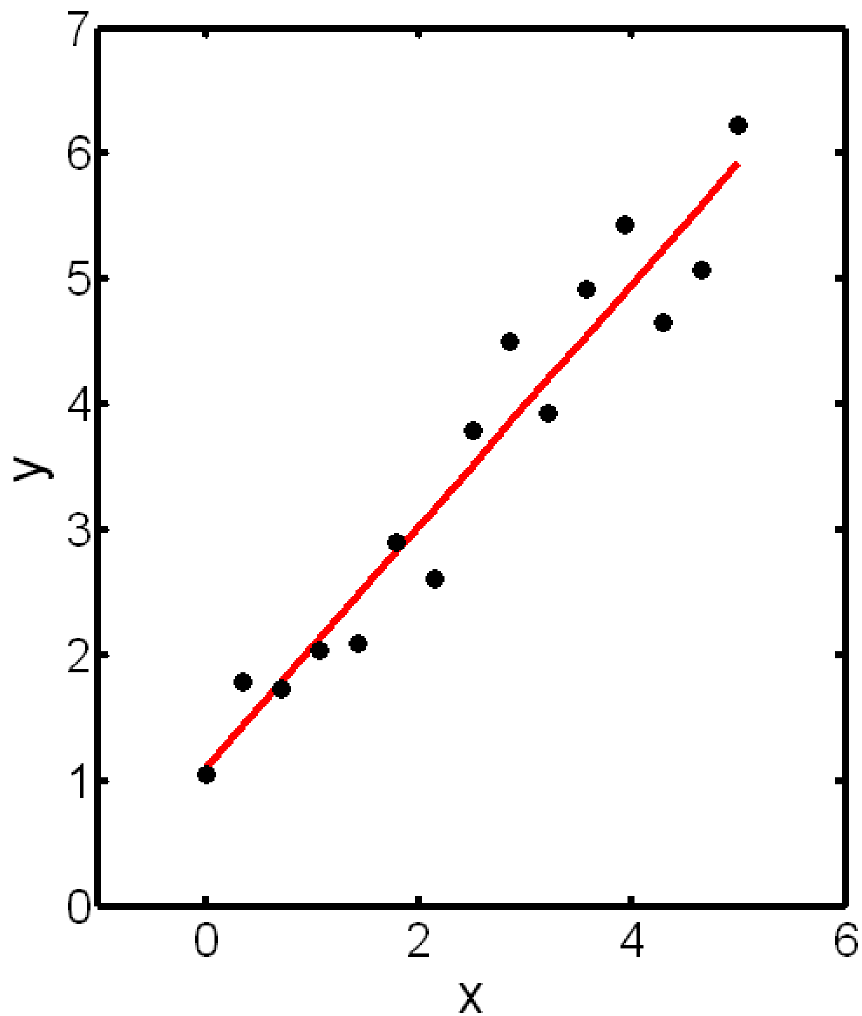
Współczynnik korelacji [im bliższy 1 tym lepiej]

$$|r| \leq 1$$

Suma kwadratów dla dobrego dopasowania

$$\frac{\chi^2}{n-m} \sim 1$$

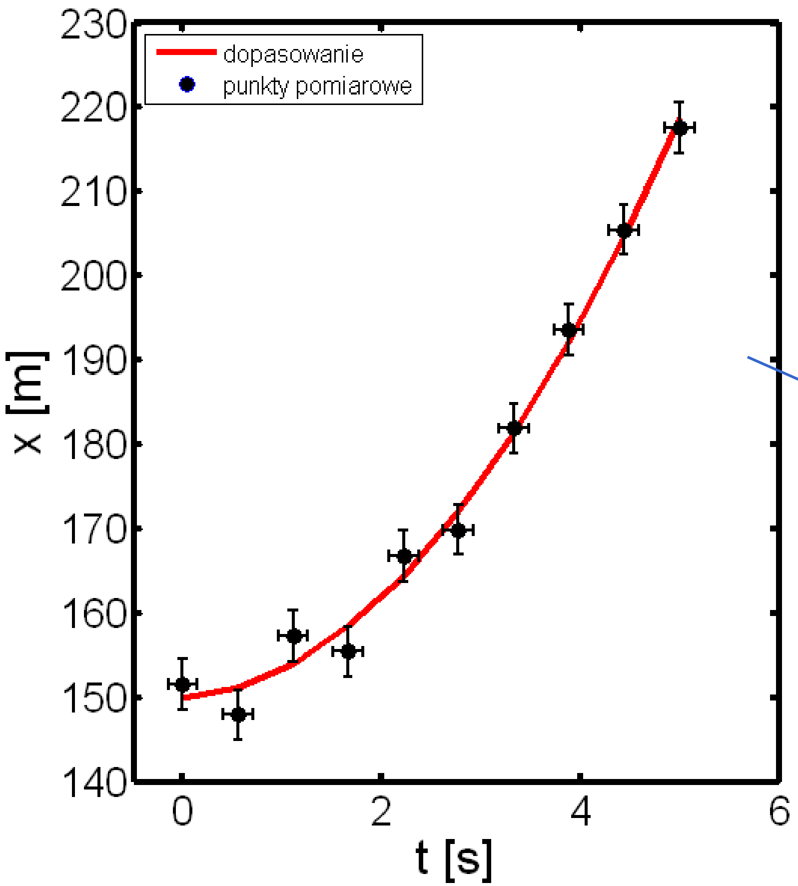
n-liczba danych,
m-liczba parametrów]



Dla zależności liniowej przepisy na a i b są proste!

Regresja liniowa 4/4

To też jest regresja liniowa (parametry modelu są w pierwszej potędze)



Model:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$$

$$\bar{a}, \bar{V}_0, \bar{x}_0$$

wraz z niepewnościami

I to już koniec na dzisiaj

Za zgodą Autorów wykorzystane zostały elementy prezentacji prof. Marka Stankiewicza i dr. hab. Jacka Zejmy