N0 Pomiary wielkości prostych i złożonych - Opracowanie wyników

Zadanie 1. **liczba cyfr znaczących niepewności pomiarowej i wyniku**

Zapisz poniższe wyniki w poprawnej postaci:

a) $v = (8.123456 \pm 0.0372)\ m/s$

b) $x = (3.1234 \cdot 10^4 \pm 126)\ m$

c) $m = (5.6789 \cdot 10^{-7} \pm 3 \cdot 10^{-9})\ kg$

d) $g = (9.826 \pm 0.02345)\ m/s^2$

Zadanie 2. **zwiększanie dokładności pomiaru poprzez pomiar wielokrotności wielkości mierzonej**

Mając dobry stoper i odrobinę doświadczenia, można mierzyć czas w zakresie od sekundy do wielu minut z niepewnością rzędu 0.1 *s*. Przypuśćmy, że chcemy zmierzyć okres T wahadła, dla którego $T \approx 0.5\ s$. Jeżeli zmierzymy czas trwania jednej oscylacji, to niepewność wyznaczenia okresu będzie wynosiła ok. 20%, ale jeżeli zmierzymy czas trwania wielu kolejnych oscylacji, to używając tego samego stopera potrafimy uzyskać większą dokładność.

a) Jaki jest wynik pomiaru T, jego niepewność i niepewność względna, jeżeli zmierzony czas trwania pięciu kolejnych pełnych wahnięć wahadła jest równy $(2.4 \pm 0.1)\ s$?

b) Czy istnieją ograniczenia na poprawianie niepewności wyznaczenia T przez zwiększanie liczby obserwowanych oscylacji?

Zadanie 3. **mała seria pomiarów bezpośrednich, pomiar wielkości złożonej**

W celu wyznaczenia wartości przyśpieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego wykonano następujące pomiary:

– pięciokrotnie zmierzono długość wahadła i otrzymano następujące wyniki (w metrach):
  0.50, 0.50, 0.49, 0.51, 0.50
– pięciokrotnie zmierzono czas trwania 10-ciu pełnych wahnięć otrzymując następujące wyniki w sekundach):
  14.5, 14.6, 14.4, 14.7, 14.3.

1. Zapisz powyższe dane, tak jak zapisałbyś je w poprawnie prowadzonym protokole pomiarowym.
2. Oblicz długość wahadła i okres drgań oraz ich niepewności pomiarowe.
3. Wyprowadź wzór wiążący okres drgań wahadła matematycznego z długością wahadła i wartością przyśpieszenia grawitacyjnego.
4. Oblicz wartość przyśpieszenia ziemskiego wyznaczoną w omawianym eksperymencie.
5. Znajdź niepewność wykonanego pomiaru przyśpieszenia ziemskiego
6. Porównaj uzyskany wynik z wartością tablicową.
7. Wymień źródła niepewności pomiarowych w tym eksperymencie.

Zadanie 4. **sporządzanie wykresu i wnioskowanie na jego podstawie**

Aby sprawdzić czy w doświadczeniu z wahadłem matematycznym okres T jest niezależny od amplitudy A wykonano pomiary zestawione w tabeli poniżej:

A [deg]	5 (2)	17.2 (2)	25 (2)	40 (4)	53 (4)	67 (6)
T [s]	1.932 (5)	1.94 (1)	1.96 (1)	2.01 (1)	2.04 (1)	2.12 (2)

1. Wykonaj wykres zależności T(A) nanosząc podane niepewności.
2. Czy na podstawie tych pomiarów teza o niezależności okresu od amplitudy byłaby do utrzymania?
3. Rozważmy teraz eksperyment, w wyniku którego uzyskano takie same wartości wielkości mierzonych, ale mierzony okres T obarczony był każdorazowo niepewnością 0.3 s. Czy na podstawie takich pomiarów można by obalić tezę o niezależności okresu od amplitudy?

Zadanie 5. **regresja liniowa**

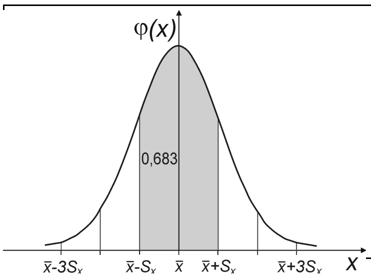
Wyznaczono zależność wydłużenia x sprężyny od obciążającej ją masy m. Wyznacz stałą sprężystości sprężyny. Zastosuj metodę regresji liniowej.

m [kg]	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x [cm]	0.0	2.9	6.0	9.0	11.8	14.8	17.8	20.7	24.0	26.0

Podstawowe wiadomości i wzory

NIEPEWNOŚCI STATYSTYCZNE

W eksperymentach, w których dominują niepewności przypadkowe (tj. podlegające rozkładowi Gaussa) wartość oczekiwana pomiaru jest równa średniej arytmetycznej ($\bar{x}$) wyników poszczególnych pomiarów (x_i), a o statystycznej niepewności pomiarowej serii wielu pomiarów mówi odchylenie standardowe średniej.



$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$S_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

Przykład:
Załóżmy, że do wyznaczenia czasu spadku swobodnego jakiegoś ciała używamy stopera pozwalającego na pomiar z dokładnością do 0,01 s. Mierząc wielokrotnie ten czas otrzymujemy wyniki, które opisane są pewną statystyką (krzywa Gaussa o centrum w określonym punkcie i o określonej szerokości). Na podstawie uzyskanych wyników jesteśmy w stanie wyznaczyć estymatory wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego wartości średniej. Tę ostatnią interpretujemy jako niepewność statystyczną wykonanej serii pomiarów.

Jeżeli interesującej nas wielkości fizycznej nie można zmierzyć w sposób bezpośredni, ale znana jest funkcja $z= f(X_1,X_2,...,X_n)$ opisująca związek pomiędzy wielkością z (mierzoną w pomiarze pośrednim) i mierzonymi bezpośrednio wielkościami $X_1, X_2,...X_n$, to estymator wartości oczekiwanej wielkości fizycznej z obliczamy ze wzoru:

$$\bar{z}=f\left(\overline{X_1},\overline{X_2},\ldots\overline{X_n}\right)$$

a miarą jej niepewności statystycznej jest odchylenie standardowe:

$$\Delta z_{st}=S_z=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}S_{\overline{X}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial X_2}S_{\overline{X}_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial X_n}S_{\overline{X}_n}\right)^2}$$

NIEPEWNOŚCI SYSTEMATYCZNE

W oszacowaniu dokładności pomiarów należy uwzględnić także niepewności systematyczne wynikające np. z dokładności przyrządów czy cech specyficznych pomiaru.

Przykład:
Załóżmy, że używamy wagi o dokładności 0.1 kg. Może się zdarzyć, że ważąc przy jej pomocy pewną ilość jakiejś substancji zawsze uzyskiwać będziemy taki sam wynik, nawet wtedy gdy zdejmiemy z szalki wagi pewną ilość tej substancji. Podobnie systematycznie zafałszowany wynik otrzymamy, gdy waga nie została uprzednio wykalibrowana czy „wyzerowana". Niepewność systematyczna związana z wagą może być dominująca i decyduje ona o niepewności pomiaru.

Niepewność systematyczną wielkości złożonych możemy znaleźć metodą różniczki zupełnej:

$$\Delta z_{sys}=\left|\frac{\partial f}{\partial X_1}\Delta X_1^{sys}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial X_2}\Delta X_2^{sys}\right|+\ldots\left|\frac{\partial f}{\partial X_n}\Delta X_n^{sys}\right|$$

Jeżeli w przepisie funkcji opisującej wielkość z występują tylko iloczyny lub ilorazy wielkości prostych (tj. mierzonych w pomiarach bezpośrednich), np. U= RI, to wzór powyższy jest równoważny zależności:

$$\frac{\Delta z}{z}=\frac{\Delta X_1}{X_1}+\frac{\Delta X_2}{X_2}+\ldots+\frac{\Delta X_n}{X_n}$$

FORMA WYNIKU KOŃCOWEGO

Wynik końcowy pomiaru powinien być podany w następującej postaci:

$$z=\bar{z}\pm\Delta z_{st}\pm\Delta z_{sys}\ \ \text{[jednostka]}$$

N0 Wskazówki do rozwiązywania zadań

Ćwiczenie **N0** sprowadza się do wykonania 5-ciu zadań, które kształcą podstawowe umiejętności potrzebne do poprawnego i sprawnego przygotowywania opracowania wyników doświadczeń wykonywanych w ramach zajęć laboratoryjnych w I Pracowni Fizycznej. Przed przystąpieniem do rozwiązywania załączonych zadań należy przypomnieć sobie wiadomości podane na wykładzie tutora i uważnie zapoznać się z podanymi niżej informacjami, ułatwiającymi samodzielne i poprawne wykonanie zadań. **Zadania należy wykonać samodzielnie** na kartkach formatu A4 (wszystkie lub tyle ile wykonać potrafimy) i przynieść na zajęcia natępne po zajęciach organizacyjnych (osobiście lub, jeżeli nie będziemy w tym dniu obecni, przez koleżankę/kolegę). **Zestaw zadań zostanie oceniony**. Korzystanie z programów komputerowych (Origin, Excel, Open Office, Word i inne) nie jest obowiązkowe, ale w chwili obecnej stało się już pewnym standardem (a poza tym bardzo ułatwia życie). **Oceniana będzie poprawność wykonania poszczególnych zadań**, sprawozdanie może być napisane odręcznie (ważne, żeby czytelnie), wykresy mogą być wykonane na papierze milimetrowym.

W **zadaniu 1.** ćwiczymy umiejętność prawidłowego zapisu liczbowych wyników eksperymentu. Pamiętajmy, że podając (zapisując) wartości liczbowe wielkości fizycznych uzyskanych w wyniku eksperymentu stosujemy dwie proste reguły: (*i*) niepewności *obliczamy* z dokładnością do trzech miejsc znaczących a następnie *zaokrąglamy* do dwóch miejsc i (*ii*) odpowiednio do tego zaokrąglamy wartość samego wyniku.
Przyczyna przyjęcia takiej regulacji jest łatwa do zrozumienia. Rozważmy poniższy
przykład:

> Wykonaliśmy serię pomiarów pewnej długości a, obliczyliśmy wartość średnią, która wyniosła a= 125,3438 mm i, stosując odpowiednie procedury rachunkowe, obliczyliśmy niepewność, jaką może być obarczona ta średnia: $\Delta a = \pm 0,436$ mm. Jest jasne, że jeżeli dopuszczamy niepewność („pomyłkę”) na miejscu dziesiątych części milimetra (tu – cztery dziesiąte), to nasze możliwości wiarygodnego oszacowania wielkości możliwej niepewności na kolejnym miejscu dziesiętnym są co najmniej ograniczone. Ostatecznie przyjęto konwencję, zgodnie z którą niepewność podajemy z dokładnością do dwóch cyfr znaczących, zaokrąglając ją odpowiednio. W naszym przypadku deklarowana niepewność wyniesie więc $\Delta a = \pm 0,44$ mm. Skoro tak, to traci sens podawanie wszystkich wyżej wypisanych cyfr znaczących w wyniku pomiaru: wynik podajemy z dokładnością odpowiadającą podanej niepewności. W naszym przypadku mielibyśmy więc ostatecznie: $a = 125,34 \pm 0,44$ $[mm]$ (lub $a = (125,34 \pm 0,44)$ mm)

Zadanie 2. Na podanym przykładzie zapoznajemy się ze zwiększaniem dokładności pomiaru poprzez pomiar wielokrotności wielkości mierzonej. Zagadnienie to było omawiane na wykładzie tutora.

Zadanie 3. w zasadzie dotyczy poprawnego zapisania i opracowania wyników pomiarów, ale właściwie prowadzi przez prawie kompletną sekwencję działań w IPF (co prawda nie wykonujemy pomiarów, ale, posługując się podanymi wynikami, mamy przedstawić protokół pomiarowy i kompletne opracowanie wyników). Gdybyśmy w pracowni dokonywali pomiaru wartości przyśpieszenia ziemskiego tą metodą, to przed wykonaniem ćwiczenia należałoby być przygotowanym do referowania następujących zagadnień:

- przyspieszenie ziemskie (definicja, wartość, od czego ona zależy)
- wahadło matematyczne jako oscylator harmoniczny, zależność okresu wahań od długości wahadła i przyspieszenia ziemskiego (na ocenę wyższą od „dobry”- z wyprowadzeniem).

Zapoznanie się z w/w zagadnieniami (np. na podstawie podręcznika Resnick, Haliday, Walker, „Podstawy fizyki” lub dowolnych innych źródeł) jest również konieczne przed przystąpieniem do wykonania zadania 3. Opracowanie danych pomiarowych jest odrębnym, obszernym zagadnieniem, z którym należy się zapoznać korzystając z notatek z wykładu tutora, skryptu i podanej literatury dodatkowej. W punkcie **(1)** ćwiczymy przygotowanie bardzo prostego protokołu pomiarowego.

Następne punkty zaliczają się już do elementów opracowania ćwiczenia. W punkcie **(2)** liczymy długość wahadła (pomiar bezpośredni) i okres jego drgań (pomiar pośredni; tutaj patrz zadanie 2.) oraz ich niepewności pomiarowe. W obu przypadkach mamy małą serię pomiarową- nie liczymy więc odchyleń standardowych a niepewności liczymy jako maksymalne odchylenie od wartości średniej (jeżeli chcemy liczyć odchylenia standardowe to należy zastosować czynnik Studenta-Fishera, patrz np. H. Szydłowski, „Pracownia fizyczna"). Warto skomentować sensowność wykonywania akurat 5-ciu pomiarów. W punkcie **(3)** pokazujemy jak powiązać wielkość, którą chcemy wyznaczyć (tu przyśpieszenie ziemskie) z wielkościami, które zostały wyznaczone eksperymentalnie (w wersji najprostszej podajemy odpowiedni wzór bez jego wyprowadzania). Punkt **(4)** to podstawienie wartości uzyskanych w punkcie (2) do wzoru z punktu (3) i dokonanie niezbędnych obliczeń (proszę pamiętać o działaniach na jednostkach). Punkt **(5)** wymaga obliczenia pochodnych (posiłkując się skryptem lub odpowiednimi tablicami). W punkcie **(6)** należy zacytować wartość tablicową przyśpieszenia ziemskiego (podając źródło cytowania zgodnie z zasadami podanymi na wykładzie tutora) i podać czy uzyskana wartość eksperymentalna jest z nią zgodna w granicach niepewności pomiarowych czy też nie (wykład tutora lub np. H. Szydłowski, *Pracownia Fizyczna*). Punkt **(7)** wymaga zastanowienia się nad tym, które wielkości mierzone mają największy wpływ na niepewność wyznaczonej wielkości fizycznej, jaki jest wpływ zastosowanych przybliżeń itp. **Sprawozdania (raporty) z eksperymentów wykonanych w czasie zajęć laboratoryjnych w IPF powinny mieć formę taką jak poprawnie wykonane zadanie 3.**

W **Zadaniu 4.** należy wykonać odpowiednie wykresy (zgodnie z regułami omówionymi w czasie wykładu tutora) dla danych z dwóch eksperymentów o różnej dokładności i na ich podstawie przeprowadzić postulowane wnioskowania. Warto przypomnieć sobie, jakie upraszczające założenia robiliśmy w liceum, wyprowadzając wzór na okres wahań wahadła matematycznego (patrz literatura do zadania 3).

Zadanie 5. pozwala przećwiczyć zastosowanie procedury regresji liniowej na bazie serii 10-ciu pomiarów. Zagadnienie to nie było, z braku czasu, omówione w czasie wykładu tutora. W związku z tym należy starannie zapoznać się z odpowiednimi ustępami skryptu IPF i podręcznika H. Szydłowski, „Pracownia fizyczna" oraz (w miarę możliwości) krótką instrukcją zastosowania tej procedury w programie Origin znajdującą się przy komputerach w IPF i pod adresem *http://www.1pf.if.uj.edu.pl/materialy/programy-i-instrukcje*. W sprawozdaniu należy zamieścić porządne opracowanie wyników pomiarów zawierające nie tylko wykres, ale również wszelkie niezbędne komentarze i wnioski (proszę przypomnieć sobie omawiane w szkole prawa rządzące odkształceniami sprężystymi, w tym definicję stałej sprężystości).

Uwaga: Przy tak małej serii pomiarowej bardzo pożytecznym ćwiczeniem jest wyznaczenie parametrów prostej dopasowanej metodą regresji liniowej (i ich niepewności) wprost z odpowiednich wzorów (np. w H. Szydłowski *Pracownia Fizyczna*).

Sprawozdanie z N0, tak jak i z pozostałych ćwiczeń w IPF, powinno być napisane
na kartkach formatu A4,
dwustronnie,
z interlinią 1.5 (albo 1 kratka, jeżeli pisane jest ręcznie),
z marginesami 2.5 cm
kartki (strony) powinny być ponumerowane

W lewym górnym rogu kartki
powinno znajdować się **imię i nazwisko autora oraz numer grupy**