

1.3 Drgania tłumione i wymuszone tłumionego oscylatora harmonicznego (M22)

Celem ćwiczenia jest badanie drgań tłumionych i wymuszonych oscylatora harmonicznego. W szczególności, należy wykonać pomiar zaniku drgań oscylatora tłumionego i zbadać krzywe rezonansowe oscylatora wymuszonego dla różnych parametrów tłumienia.

Zagadnienia do przygotowania:

- *oscylator harmoniczny - równanie ruchu i jego rozwiązanie , częstotliwość własna;*
- *oscylator tłumiony - równanie ruchu i jego rozwiązanie, parametr tłumienia, tłumienie krytyczne;*
- *drżania wymuszone - wymuszenie siłą sinusoidalną, zjawisko rezonansu;*
- *dynamika bryły sztywnej, wahadło torsyjne.*

Literatura podstawowa: [45], [4], [11].

1.3.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Wahadło torsyjne

W rozdziale 1.1 omawiane było wahadło fizyczne, którego drżania spowodowane są działaniem siły grawitacji. Wahadło torsyjne to inny rodzaj wahadła, którego drżania powstają na skutek sił sprężystości. Przykładem wahadła torsyjnego jest np. bryła zawieszona na skręcającym się sprężystym drucie lub tarcza z umocowaną do niej spiralną sprężyną (włosową lub taśmową).

Dla dostatecznie małych skręceń, wahadło torsyjne zachowuje się jak oscylator harmoniczny i może być ono wykorzystane do obserwacji jego podstawowych cech. W dalszej części tego rozdziału przedstawione są elementarne wiadomości dotyczące drgań tłumionych i wymuszonych oscylatora harmonicznego. Szczegółową analizę tych zagadnień, sposób rozwiązania równań ruchu oraz ich ogólną postać czytelnik może znaleźć np. w [45].

Oscylator harmoniczny tłumiony

Zakładamy, że skręcenie wahadła torsyjnego o kąt φ z położenia równowagi prowadzi do powstania momentu siły sprężystości N_0 wprost proporcjonalnego do wychylenia (prawo Hooke'a):

$$N_0 = -D_0\varphi, \quad (1.3.1)$$

Stała proporcjonalności D_0 zależy od parametrów użytej sprężyny i jest nazywana momentem kierującym.

Równanie ruchu wahadła o momencie bezwładności J można zapisać jako:

$$J\ddot{\varphi} + D_0\varphi = 0. \quad (1.3.2)$$

Jest to równanie ruchu oscylatora harmonicznego, którego ogólnym rozwiązaniem jest:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \quad (1.3.3)$$

gdzie amplituda drgań φ_0 i ich faza δ wyznaczone są przez warunki początkowe, a ω_0 zdefiniowane jako:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{D_0}{J}} \quad (1.3.4)$$

jest częstością drgań własnych wahadła.

Rozważmy teraz oscylator tłumiony momentem siły wprost proporcjonalnym do prędkości kątowej wahadła. W takim przypadku w równaniu ruchu obecny jest dodatkowy człon:

$$N = -D\dot{\varphi}. \quad (1.3.5)$$

Równanie ruchu przyjmuje zatem następującą postać:

$$\ddot{\varphi} + \Gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (1.3.6)$$

Wprowadzony parametr

$$\Gamma = \frac{D}{J} \quad (1.3.7)$$

to tzw. parametr tłumienia.

W przypadku tłumienia mniejszego niż tzw. tłumienie krytyczne tj. dla $\Gamma < \Gamma_{kr}$, gdzie $\Gamma_{kr} = 2\omega_0$, ruch wahadła jest oscylacyjny. Dla warunków początkowych $\varphi(0) = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}(0) = 0$ (wahadło puszczane jest z zerową prędkością kątową z pozycji φ_0) rozwiązaniem równania ruchu (1.3.6) jest funkcja:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\Gamma t/2} \cos(\omega t), \quad (1.3.8)$$

gdzie

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\Gamma/2)^2} \quad (1.3.9)$$

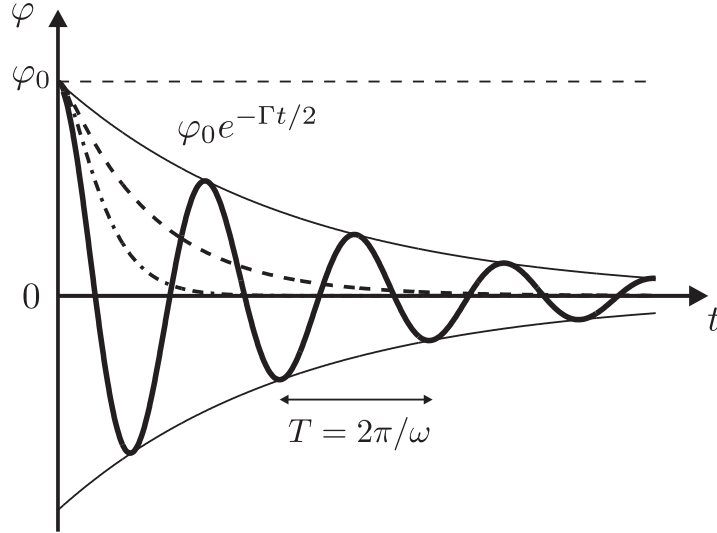
jest częstością drgań tłumionych. Częstość ta jest mniejsza niż częstość drgań własnych. Amplituda drgań zmniejsza się w czasie zgodnie z zależnością $\varphi_0 e^{-\Gamma t/2}$. Stałą czasową

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} \quad (1.3.10)$$

nazywamy czasem relaksacji. Dla słabego tłumienia, określa ona szybkość zaniku oscylacji tłumionych w układzie.

W przypadku gdy tłumienie jest silne tj. dla $\Gamma \geq \Gamma_{kr}$ podczas ruchu wahadła oscylacje nie występują. Dla granicznego przypadku tłumienia krytycznego $\Gamma = \Gamma_{kr}$

szybkość zaniku oscylacji jest maksymalna. Zależność amplitudy drgań oscylatora harmonicznego tłumionego od czasu przedstawiona jest na rysunku 1.3.1.



Rys. 1.3.1: Wychylenie oscylatora harmonicznego tłumionego φ w funkcji czasu. W chwili $t = 0$ oscylator ma wychylenie początkowe φ_0 i zerową prędkość kątową. Krzywa ciągła (—) odpowiada przypadkowi słabego tłumienia $\Gamma < 2\omega_0$. Dodatkowo, cienką linią zaznaczono obwiednię oscylacji. Krzywa ($\cdot-\cdot$) odpowiada tłumieniu krytycznemu $\Gamma = 2\omega_0$ a krzywa (— —) silnemu tłumieniu $\Gamma > 2\omega_0$.

Oscylator wymuszony

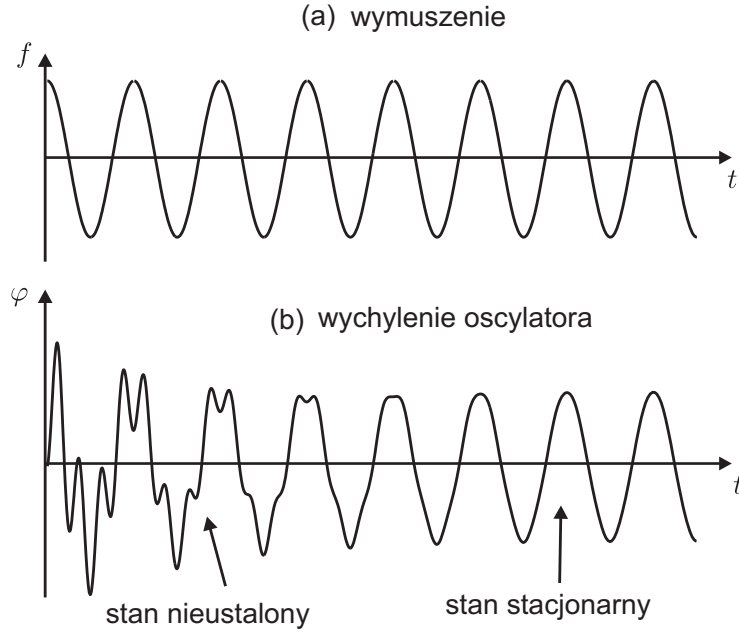
Do opisywanego oscylatora dokładamy układ wymuszający, który wywiera na wahadło torsyjne dodatkowy moment siły $N_w(t)$ zależny od czasu. Równanie ruchu przyjmuje wtedy postać:

$$\ddot{\varphi} + \Gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = f(t), \quad (1.3.11)$$

gdzie $f(t) = N_w(t)/J$. W naszym przypadku rozważamy wymuszenie harmoniczne:

$$f(t) = f_0 \cos(\Omega t). \quad (1.3.12)$$

Opisywany układ może znajdować się w stanie nieustalonym lub w stanie stacjonarnym. Stany nieustalone mogą występować np. krótko po włączeniu siły wymuszającej lub po zmianie jej częstości. Rozwiązanie równania (1.3.11) dla tych przypadków jest bardziej skomplikowane, dlatego ograniczymy się tylko do stanów stacjonarnych, w których amplituda oscylacji osiąga stałą, niezależną od czasu wartość. Oczekujemy, że dla czasu $t \gg \tau$ (czyli dla czasów znacznie większych od czasu relaksacji) drgania układu będą zachodzić z częstością siły wymuszającej Ω (rysunek 1.3.2).



Rys. 1.3.2: Reakcja tłumionego oscylatora harmonicznego na wymuszenie sinusoidalne. (a) Wymuszenie f w funkcji czasu. (b) Wychylenie oscylatora φ w funkcji czasu. W chwili $t = 0$ oscylator spoczywał w położeniu równowagi: $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. W czasie kilku pierwszych oscylacji oscylator znajduje się w stanie nieustalonym. Stan stacjonarny osiągany jest po czasie t większym niż czas relaksacji $\tau = 1/\Gamma$. Po tym czasie oscylator wykonuje drgania z częstotnością wymuszenia niezależnie od warunków początkowych. Wykresy wykonano dla częstotności wymuszenia $\Omega = 0.25\omega_0$ i parametru tłumienia $\Gamma = 0.05\omega_0$.

Przez podstawienie można łatwo sprawdzić, że funkcja:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\Omega t - \delta) \quad (1.3.13)$$

spełnia równanie ruchu (1.3.11), jeśli przyjąć następujące zależności:

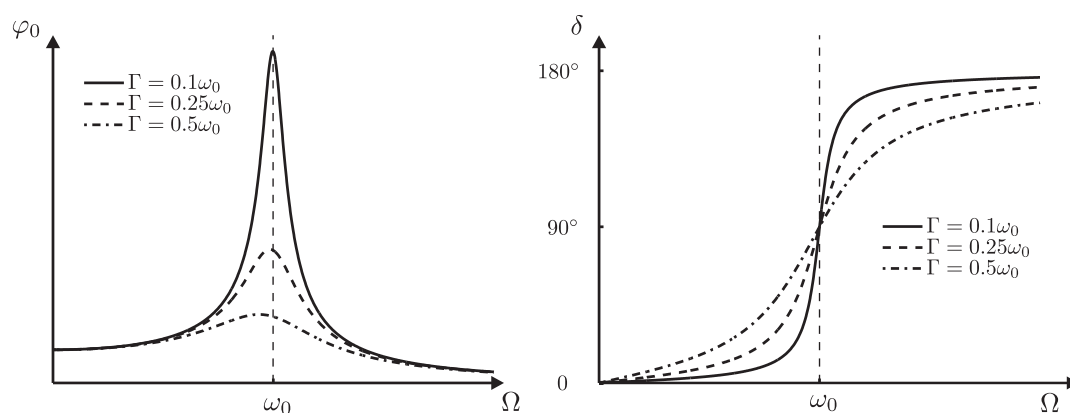
$$\varphi_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2}}, \quad (1.3.14)$$

$$\tan \delta = \frac{\Gamma \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (1.3.15)$$

Na rysunku 1.3.3 przedstawiona jest amplituda φ_0 i przesunięcie fazowe δ stacjonarnych drgań wymuszonych w zależności od częstotności siły wymuszającej. W okolicy pewnej częstotności ω_r amplituda drgań układu wyraźnie wzrasta i osiąga maksimum. Zjawisko to nazywane jest rezonansem. Częstotść rezonansową ω_r można znaleźć stosując standardową procedurę wyznaczania ekstremów funkcji $\varphi_0(\Omega)$. Maksimum funkcji, czyli rezonans występuje dla wartości:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/2}, \quad (1.3.16)$$

która jest mniejsza niż częstość drgań własnych ω_0 . Odchylenie częstości rezonansowej od częstości drgań własnych rośnie wraz ze wzrostem parametru tłumienia Γ . Współczynnik tłumienia wpływa również na szerokość krzywej rezonansowej oraz jej wysokość. Im większy jest współczynnik tłumienia, tym krzywa rezonansowa jest szersza a jej amplituda mniejsza. Szerokość krzywej rezonansowej określa parametr nazywany szerokością połówkową (szerokość krzywej mierzona w połowie jej wysokości). Dla słabego tłumienia można w dużym przybliżeniu przyjąć, że szerokość połówkowa krzywej rezonansowej jest rzędu $\sqrt{3}\Gamma$.



Rys. 1.3.3: Zależności amplitudy (krzywe rezonansowe) i fazy drgań stacjonarnych oscylatora harmonicznego od częstości siły wymuszającej. Wykresy pokazane są dla kilku parametrów tłumienia Γ .

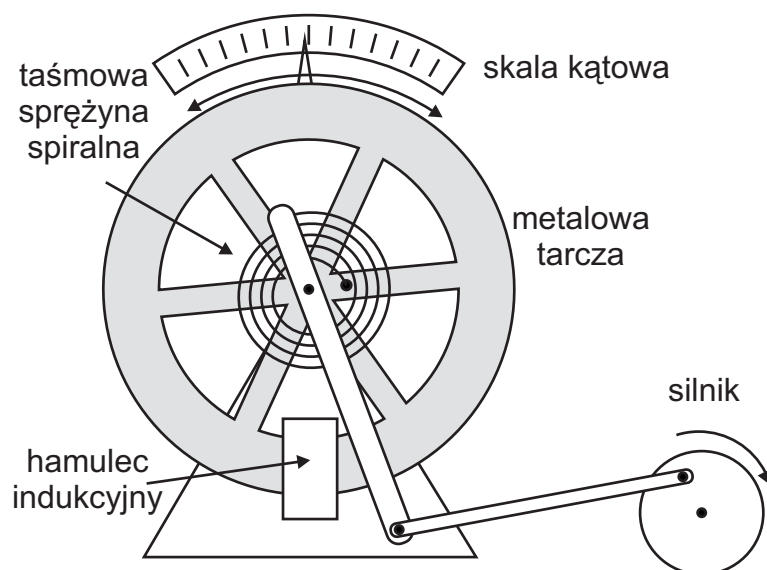
Choć stacjonarne drgania wymuszone zachodzą zawsze z częstością siły wymuszającej Ω to przesunięcie fazowe δ pomiędzy wymuszeniem a wychyleniem oscylatora silnie zależy od Ω . Dla małych częstości, oscylacje wahadła są zgodne z siłą wymuszającą, dla $\Omega = \omega_0$ są przesunięte w fazie o 90° a dla wysokich częstości są w przeciwfazie w stosunku do siły wymuszającej.

1.3.2 Przebieg pomiarów

Układ doświadczalny

Głównym elementem zestawu doświadczalnego jest wahadło torsyjne tzw. balans, czyli tarcza ze stopu miedzi, do której przymocowana jest spiralna sprężyna (rysunek 1.3.4).

Warto zwrócić uwagę na wykorzystanie takiego elementu np. w zegarkach mechanicznych i jego analogię do wahadła grawitacyjnego w zegarach ściennych. Wymuszenie odbywa się poprzez układ dwóch prętów umocowanych z jednej strony do sprężyny



Rys. 1.3.4: Uproszczony rysunek wahadła balansowego używanego podczas doświadczenia. Wahadła tego typu wykorzystywane są np. w zegarkach mechanicznych.

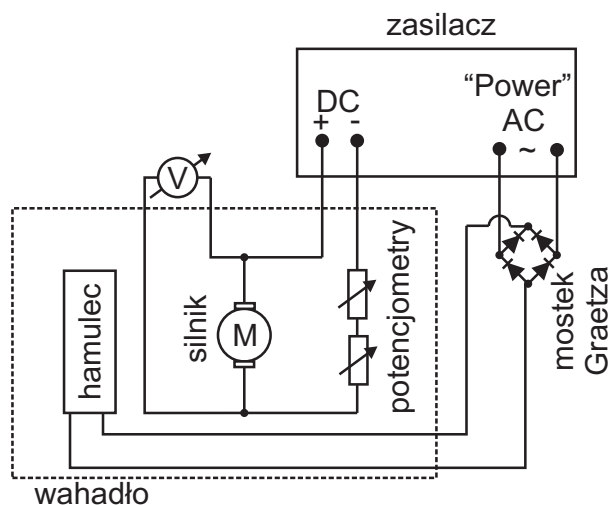
wahadła a z drugiej strony (mimośrodowo) do silnika stałoprądowego. Przybliżenie oscylatora harmonicznego jest spełnione dla wszystkich kątów wychylenia (mierzonych w jednostkach umownych). Regulacja częstotliwości siły wymuszającej następuje poprzez zmianę napięcia podawanego na silnik. Schemat połączenia układu przedstawiony jest na rysunku 1.3.5. Tłumienie w układzie realizowane jest poprzez hamulec indukcyjny działający w oparciu o powstawanie prądów wirowych. W hamulcu indukcyjnym tłumienie jest wprost proporcjonalne do prędkości kątowej tarczy. Zmiana tłumienia następuje poprzez regulację prądu płynącego przez uzwojenia elektromagnesu, między którymi umieszczone jest koło balansowe, a w praktyce przez zmianę ustawienia tarczy *Power* na zasilaczu.

Kalibracja częstotliwości siły wymuszającej

Pomiar zależności $\Omega = \Omega(U)$, gdzie Ω jest częstotliwością siły wymuszającej a U jest napięciem podawanym na silnik. Ta część ćwiczenia pozwoli na późniejsze przedstawienie krzywych rezonansowych w funkcji częstotliwości.

Wyznaczenie częstotliwości drgań wahadła

Prosty pomiar stoperem. Puszcając koło balansowe z maksymalnego wychylenia należy zmierzyć okres drgań swobodnych $T_0 = 2\pi/\omega_0$ i tłumionych $T = 2\pi/\omega$ wahadła dla różnych parametrów tłumienia Γ .



Rys. 1.3.5: Schemat połączenia układu doświadczalnego.

Badanie oscylacji tłumionych

Pomiar amplitudy oscylacji w zależności od czasu $\varphi_m = \varphi(t_m)$ gdzie $t_m = mT/2$, T jest okresem drgań tłumionych a $m = 1, 2, \dots$. Puszczając koło balansowe z maksymalnego wychylenia można obserwować zanik amplitudy oscylacji. Należy zanotować maksymalne wychylenia wahadła w zależności od numeru oscylacji m (zarówno dla dodatnich i ujemnych położań czyli co $t = T/2$). Pomiary należy wykonać dla różnych parametrów tłumienia Γ . Pomiar pozwoli na wyznaczenie obwiedni drgań tłumionych (por. rysunek 1.3.1).

Pomiar krzywej rezonansowej

Pomiar krzywej rezonansowej $\phi_0 = \phi_0(\Omega)$, dla różnych wartości współczynnika tłumienia Γ , pozwoli na wykreślenie krzywych rezonansowych analogicznych do krzywych pokazanych na rysunku 1.3.3. Zmieniając i notując napięcie zasilania silnika, należy zapisać maksymalne wychylenie koła balansowego po ustabilizowaniu się amplitudy drgań. Do precyzyjnej zmiany napięcia należy stosować bardziej czuły potencjometr. Dla małych parametrów Γ , przy zmianie częstości siły wymuszającej, wahadło bardzo wolno dochodzi do stanu stabilnego. Dlatego warto, przy każdorazowej zmianie napięcia, bardzo delikatnie ręcznie lub poprzez wyzerowanie napięcia zatrzymać koło balansowe. Wyraźnie wtedy widać stopniowy proces dochodzenia do stabilnego periodycznego ruchu. Pomocne może być wstępne oszacowanie czasu relaksacji τ na podstawie pomiarów drgań tłumionych. Dla małych parametrów Γ koło balansowe zaczyna uderzać w ograniczniki i krzywej rezonansowej nie można zmierzyć w ścisłym rezonansie. W połączeniu z małą precyzją pomiarów, może utrudnić to dalszą analizę danych.

Podczas pomiaru krzywych rezonansowych można w sposób jakościowy wykonać obserwację przesunięcia fazowego między oscylacjami wahadła a siłą wymuszającą.

1.3.3 Opracowanie wyników

Kalibracja częstości siły wymuszającej

Narysować wykres $\Omega = \Omega(U)$. Do zmierzonej zależności, metodą regresji liniowej, dopasować prostą. Otrzymane parametry regresji pozwolą na późniejsze przeliczenie napięcia na częstotliwość i prezentację krzywych rezonansowych w skali częstości.

Wyznaczenie częstości drgań wahadła

Wyznaczyć i porównać częstości drgań wahadła swobodnego ω_0 i tłumionego ω dla różnych wartości Γ . W tej części ćwiczenia należy szczególnie zwrócić uwagę na niepewności pomiarowe.

Badanie oscylacji tłumionych

Narysować wykresy zaniku amplitudy oscylacji $\phi_m = \phi(t_m)$ dla różnych parametrów tłumienia. Z wykresów (przez dopasowanie eksponenty lub prostej do zlinearyzowanej zależności) wyznaczyć parametry Γ oraz ω dla różnych wartości prądu płynącego przez hamulec indukcyjny.

Pomiar krzywej rezonansowej

Narysować krzywe rezonansowe $\phi = \phi_0(\Omega)$. Do krzywych dopasować zależność z równania (1.3.14). Wyznaczyć parametry dopasowania f_0 , ω_0 , Γ oraz wielkość ω_r . Porównać otrzymane wartości z wartościami otrzymanymi w poprzednich punktach. Przedyskutować otrzymane wyniki. Opcjonalnie można wykonać wykres przesunięcia fazowego między oscylacjami wahadła a siłą wymuszającą.