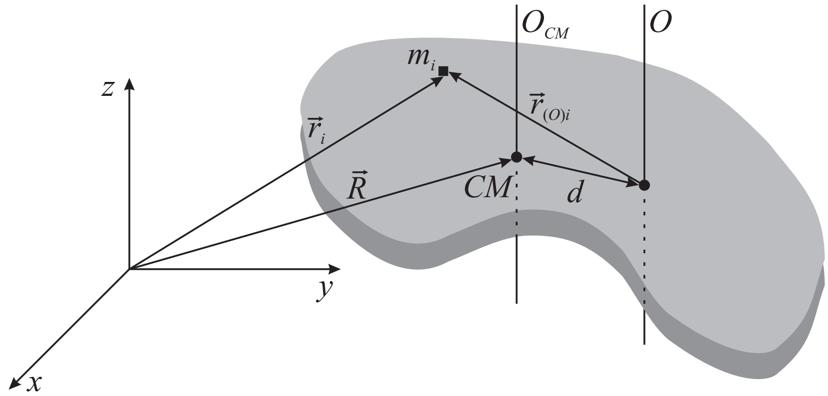
1.6 Badanie ruchu obrotowego bryły sztywnej (M7)

Celem ćwiczenia jest sprawdzenie praw ruchu obrotowego bryły sztywnej.
Zagadnienia do przygotowania:
– *bryła sztywna;*
– *moment bezwładności;*
– *twierdzenie Steinera;*
– *prawa dynamiki ruchu obrotowego.*
Literatura podstawowa: [1], [2], [5].

1.6.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Bryła sztywna

Bryłą sztywną nazywamy ciało stałe, które nie deformuje się pod wpływem sił zewnętrznych. Ruch bryły można rozłożyć na ruch postępowy jej środka masy oraz ruch obrotowy. Ruchem obrotowym rządzą prawa kinematyki i dynamiki bryły sztywnej.



Rys. 1.6.1: Bryła sztywna z zaznaczonym położeniem środka masy CM oraz równoległymi do siebie osiami obrotu przechodzącymi przez środek masy O_{CM} oraz przez dowolny punkt O.

Przyjmijmy, że bryłę można podzielić na małe kawałki o masach m_i leżące w położeniach $\vec{r}_i$ (rysunek 1.6.1). Środek masy bryły (CM) to punkt wskazany przez wektor:

$$\vec{R} = \sum_i \frac{m_i \vec{r}_i}{M}, \tag{1.6.1}$$

gdzie $M = \sum_i m_i$ to masa bryły. Niech odległości mas m_i od osi obrotu O wynoszą $r_{(O)i}$. Moment bezwładności bryły względem osi O to wielkość skalarna:

$$J_{(O)} = \sum_i m_i r^2_{(O)i}. \tag{1.6.2}$$

W przypadku rozciągłego rozkładu masy ciało można podzielić na nieskończenie małe elementy o masach dm. Wtedy moment bezwładności bryły względem osi O można obliczyć z wyrażenia:

$$J_{(O)} = \int r_{(O)}^2 dm. \tag{1.6.3}$$

gdzie $r_{(O)}$ jest odległością każdego elementu masy od osi obrotu, a całkowanie odbywa się po całej objętości.

Dynamika ruchu obrotowego

Jeżeli wypadkowy moment siły działający na bryłę sztywną wynosi zero, to bryła pozostaje w spoczynku lub obraca się ruchem jednostajnym (ze stałą prędkością kątową). Pod działaniem momentu siły $\vec{N}$ bryła sztywna może wykonywać ruch obrotowy. Do opisu ruchu obrotowego używa się kąta $\vec{\phi}$ o jaki obraca się bryła, prędkości kątowej $\vec{\omega} = d\vec{\phi}/dt$, przyspieszenia kątowego $\vec{\epsilon} = d^2\vec{\phi}/dt^2$ oraz momentu pędu $\vec{L}$. Równanie opisujące ruch obrotowy wokół osi O bryły sztywnej o momencie bezwładności $J_{(O)}$ ma postać:

$$\vec{N} = J_{(O)} \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}, \tag{1.6.4}$$

lub zapisane przy użyciu momentu pędu ma postać:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{1.6.5}$$

Najprostszym przypadkiem ruchu obrotowego jest obrót bryły sztywnej dookoła ustalonej osi. Wtedy wektory momentu siły $\vec{N}$, prędkości kątowej $\vec{\omega}$ oraz momentu pędu $\vec{L} = J_{(O)}\vec{\omega}$ są do siebie równoległe i powiązane są poprzez równanie ruchu:

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J_{(O)} \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.6.6}$$

W ogólnym przypadku wektor momentu pędu bryły sztywnej nie jest równoległy do wektora pędkości kątowej. Wtedy wielkości te powiązane są ze sobą przez:

$$\vec{L} = \hat{J}\vec{\omega}. \tag{1.6.7}$$

gdzie tensor bezwładności $\hat{J}$ jest tensorem symetrycznym drugiego rzędu. Tensor bezwładności można zawsze zdiagonalizować poprzez obrót układu współrzędnych. Osie tego nowego układu współrzędnych nazywane są głównymi osiami bezwładności.

Twierdzenie Steinera

Najczęściej moment bezwładności można łatwo obliczyć względem osi przechodzącej przez środek masy ciała. Dla określenia momentu bezwładności względem innej osi pomocne jest twierdzenie o osiach równoległych (twierdzenie Steinera).

Oznaczmy przez J_{CM} moment bezwładności bryły względem osi O_{CM} przechodzącej przez środek masy (rysunek 1.6.1). Moment bezwładności $J_{(O)}$ względem osi O równoległej do osi O_{CM} wyraża się wzorem:

$$J_{(O)} = J_{CM} + Md^2, \tag{1.6.8}$$

gdzie d to wzajemna odległość prostych O i O_{CM}.

Przykładowo dla jednorodnej kuli o masie M i promieniu R środek masy to jej środek geometryczny, a $J_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$. Jeżeli oś O jest styczna do kuli to $d = R$ więc $J_{(O)} = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$.

Dla jednorodnego walca o masie M, promieniu R i wysokości H środek masy leży na osi symetrii obrotowej, w połowie wysokości. W tym przypadku można mówić o dwóch wyróżnionych osiach obrotu: osi pokrywającej się z osią symetrii obrotowej z $J_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$ oraz osi do niej prostopadłej przechodzącej przez środek masy walca z $J_{CM} = M(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}H^2)$. Jeżeli oś O jest styczna do pobocznicy walca to korzystając z wzoru (1.6.8) dla $d = R$ otrzymujemy $J_{(O)} = \frac{3}{2}MR^2$.

1.6.2 Przebieg pomiarów

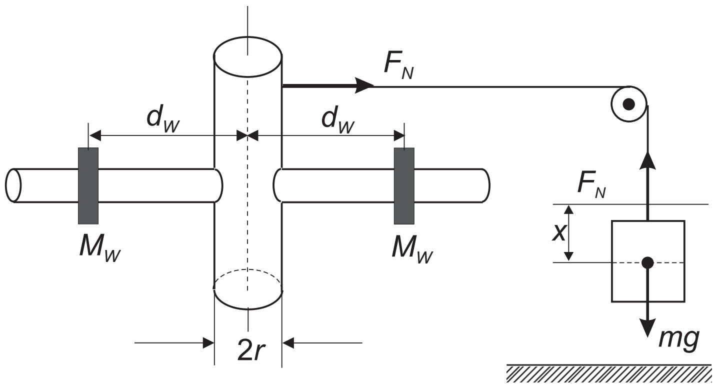
Układ doświadczalny

Przyrządy: wahadło Oberbecka, bramki elektroniczne do pomiaru czasu, przymiar, kilka par obciążników do umieszczenia na ramionach wahadła oraz pojedyncze obciążniki do rozpędzania wahadła.

Używane w pomiarach wahadło Oberbecka (rysunek 1.6.2) jest obracającym się wokół swojego środka prętem. Do jego ramion można przyczepić ciężarki w kształcie walca (masa M_W, promień R_W, wysokość H_W). Moment bezwładności tego walca względem osi przechodzącej przez środek masy prostopadłej do osi symetrii walca wynosi $J_{W,CM} = M_W(\frac{1}{4}R_W^2 + \frac{1}{12}H_W^2)$. Walec znajduje się w odległości d_W od osi obrotu wahadła Oberbecka. Korzystając z twierdzenia Steinera obliczamy moment bezwładności walca względem tej osi obrotu - $J_W = J_{W,CM} + M_W d_W^2$. Moment bezwładności wahadła bez obciążenia wynosi J_X. Przy obciążeniu dwoma identycznymi ciężarkami umieszczonymi w tej samej odległości od osi obrotu otrzymujemy całkowity moment bezwładności wahadła równy $J = J_X + 2J_W$.

Na osi wahadła o promieniu r nawinięta jest nić, która przechodzi przez blok, a zakończona jest uchwytem na ciężarki. Równanie ruchu postępowego ciężarka o masie m zawieszonego na nici ma postać:

$$mg - F_N = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{1.6.9}$$



Rys. 1.6.2: Schemat układu doświadczalnego z wahadłem Oberbecka.

gdzie F_N to siła naciągu nici, x to odległość na jaką obniży się ciężarek. Na wahadło działa moment siły $N = F_N r$, więc równanie ruchu obrotowego wahadła ma postać:

$$(J_X + 2J_W)\,\frac{d^2\phi}{dt^2} = F_N r, \tag{1.6.10}$$

gdzie ϕ to kąt o jaki obróci się wahadło. Zmienne x i ϕ są ze sobą związane zależnością $x = r\phi$, a stąd $d^2x/dt^2 = rd^2\phi/dt^2$. Dla ruchu jednostajnie przyspieszonego ciężarka mamy $x\,(t) = at^2/2$, jeżeli w chwili początkowej ciężarek znajdował się w spoczynku. Korzystając z tych związków oraz z równań (1.6.9) i (1.6.10) obliczamy przyspieszenie układu:

$$a = \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{mgr^2}{J_X + 2J_W + mr^2}. \tag{1.6.11}$$

Przebieg doświadczenia

Przy pomiarach czasu przelotu bardzo ważne jest takie wybranie położenia początkowego szalki z ciężarkiem, aby po jego starcie natychmiast uruchamiała się fotokomórka. Dzięki temu spełniona jest zależność $h = at^2/2$ (gdzie h jest odległością pomiędzy fotokomórkami) i możemy korzystać z równania (1.6.11). W doświadczeniu możemy sprawdzić, czy kwadrat czasu przelotu zależy liniowo od różnych wielkości.

Zależność t^2 od h

$$t^2 = \frac{2h\left(J_X + 2J_W + mr^2\right)}{mgr^2} \tag{1.6.12}$$

Odległość h powiększać np. o 5 cm. Dla każdej wysokości h zmierzyć kilka czasów przelotu. Wygodniejsze do opracowania jest korzystanie z wahadła bez obciążenia.

Zależność t^2 od d_W^2

$$t^2 = \frac{2h\left(J_X + 2J_{W,CM} + 2M_W d_W^2 + mr^2\right)}{mgr^2} \tag{1.6.13}$$

Obciążniki umieścić symetrycznie na obu ramionach wahadła. Zmierzyć kilkakrotnie czasy przelotu dla różnych położeń d_W obciążników.

Zależność t^2 od $1/m$

$$t^2 = \frac{2h\left[\left(J_X + 2J_W\right)(1/m) + r^2\right]}{gr^2} \tag{1.6.14}$$

Wygodnie jest pracować z wahadłem bez obciążników. Zmierzyć kilkakrotnie czasy przelotu dla różnych obciążeń szalki. Należy zmierzyć również długość i średnicę ramion wahadła Oberbecka, które posłużą do wyznaczenia momentu bezwładności wahadła.

1.6.3 Opracowanie wyników

Dla wszystkich badanych relacji mierzonych parametrów wykonać wykresy i dopasować zależność liniową wyznaczając jednocześnie współczynnik korelacji. Wielkość współczynnika korelacji mówi o liniowej zależności badanych wielkości, co potwierdza słuszność praw ruchu obrotowego. Używając dopasowanych współczynników regresji liniowej wyznaczyć moment bezwładności nieobciążonego wahadła Oberbecka.

Obliczyć moment bezwładności nieobciążonego wahadła Oberbecka, traktując je jak walec obracający się względem osi prostopadłej do osi symetrii obrotowej. Wahadło wykonane jest z aluminium, którego gęstość wynosi 2.7 g/cm^3. Sprawdzić zgodność wyników dla momentu bezwładności wahadła otrzymanych przy użyciu obu metod. Przeprowadzić dyskusję uzyskanych wyników.