

1.1 Wahadło anharmoniczne (M5)

Celem ćwiczenia jest zbadanie drgań anharmonicznych wahadła fizycznego (zależność okresu drgań wahadła od amplitudy jego drgań, bilans energetyczny wahadła).

Zagadnienia do przygotowania:

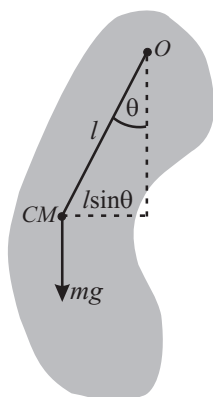
- oscylator harmoniczny;
- wahadło fizyczne;
- oscylator anharmoniczny;
- wykresy fazowe.

Literatura podstawowa: [1], [2], [5], [4].

1.1.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne to bryła, która może obracać się wokół osi O nie przechodzącej przez środek ciężkości CM (rysunek 1.1.1). Niech kąt θ oznacza wychylenie z położenia równowagi. Moment siły N działający na wahadło, pochodzący od siły ciężkości, wyraża się wzorem:



$$N = -mgl \sin \theta, \quad (1.1.1)$$

gdzie m to masa wahadła, l odległość środka ciężkości od punktu podparcia, czyli od osi obrotu. Równanie ruchu wahadła ma postać:

$$N = J\ddot{\theta}, \quad (1.1.2)$$

gdzie J jest momentem bezwładności względem osi obrotu. Wprowadzając oznaczenie $\omega_0^2 = mgl/J$ można równanie ruchu zapisać w postaci:

Rys. 1.1.1: Wahadło fizyczne.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (1.1.3)$$

Przybliżenie oscylatora harmonicznego

Dla małych wychyleń możemy zrobić przybliżenie $\sin \theta \approx \theta$. Wtedy równanie (1.1.3) sprowadza się do równania ruchu oscylatora harmonicznego:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (1.1.4)$$

Rozwiązaniem równania (1.1.4) jest funkcja postaci:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0), \quad (1.1.5)$$

gdzie θ_0 to amplituda, a ϕ_0 faza początkowa.

Okres drgań wahadła fizycznego

Ruch opisany funkcją (1.1.5) jest okresowy z okresem $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Dla pewnych warunków początkowych ruch opisany równaniem (1.1.3) jest również okresowy. Aby obliczyć okres drgań T mnożymy równanie (1.1.3) przez $\dot{\theta}$ i po separacji zmiennych całkujemy obustronnie uwzględniając warunek $\dot{\theta} = 0$ dla $\theta = \theta_0$. Otrzymujemy wtedy równanie ruchu:

$$\dot{\theta}^2 - 2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) = 0. \quad (1.1.6)$$

Przy przejściu wahadła od kąta 0 do θ_0 upływa czas równy $T/4$. Więc rozdzielając zmienne i całkując równanie (1.1.6) po czasie w granicach $(0, T/4)$ oraz po kącie w granicach $(0, \theta_0)$ otrzymujemy:

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)}}. \quad (1.1.7)$$

W całce z równania (1.1.7) wykonujemy zamianę zmiennych z θ na α poprzez podstawienie $\sin \alpha = \sin(\theta/2) / \sin(\theta_0/2)$. Otrzymujemy całkę eliptyczną zupełną pierwszego rodzaju:

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \alpha}}. \quad (1.1.8)$$

Całkę eliptyczną można wyrazić przez funkcję hipergeometryczną ${}_2F_1$ lub jej rozwinięcie w szereg. Wtedy okres drgań wynosi:

$$\begin{aligned} T &= T_0 \cdot {}_2F_1 \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right] = \\ &= T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

W przybliżeniu małych wychyleń otrzymujemy okres drgań:

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \frac{11}{3072} \theta_0^4 - \dots \right]. \quad (1.1.10)$$

Przybliżenie oscylatora anharmonicznego

Dla większych wychyleń musimy uwzględnić kolejne wyrazy rozwinięcia w szereg funkcji $\sin \theta \approx \theta - \theta^3/6$. Wtedy równanie (1.1.3) sprowadza się do równania ruchu oscylatora anharmonicznego:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2 \theta^3}{6} = 0. \quad (1.1.11)$$

Można znaleźć przybliżone rozwiązanie tego równania w postaci [4]:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) + \frac{\theta_0^3}{192} \sin(3\omega t), \quad (1.1.12)$$

gdzie $\omega \approx \omega_0 (1 - \theta_0^2/16)$.

Wykresy fazowe

Ruch wahadła fizycznego (i innych układów mechanicznych) można wygodnie przedstawić na płaszczyźnie fazowej $(\theta, \dot{\theta})$ [4]. Korzystając z równania (1.1.6) możemy zapisać energię mechaniczną wahadła fizycznego (energia potencjalna określona względem najniższego położenia wahadła):

$$E = \frac{J\dot{\theta}^2}{2} + mgl(1 - \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta_0). \quad (1.1.13)$$

Różnym wartościom energii E odpowiada rodzina krzywych na płaszczyźnie fazowej. Jeżeli $E = 0$, to wahadło pozostaje w spoczynku. Odpowiada temu punkt $(0, 0)$ na płaszczyźnie fazowej. Dla $0 < E < 2mgl$ otrzymujemy krzywe zamknięte otaczające punkt $(0, 0)$, a ruch jest periodyczny względem położenia równowagi. Dla $E > 2mgl$ mamy krzywe otwarte, a ruch odbywa się tylko w jednym kierunku.

Przy rysowaniu krzywych wygodnie jest wprowadzić bezwymiarową energię $\epsilon = 2E/(J\omega_0^2)$ i prędkość $v = \dot{\theta}/\omega_0$. Wtedy na płaszczyźnie (θ, v) rysujemy krzywe $v^2 = \epsilon - 4\sin^2(\theta/2)$. Ruch periodyczny mamy dla $0 < \epsilon < 4$.

1.1.2 Przebieg pomiarów

Układ doświadczalny

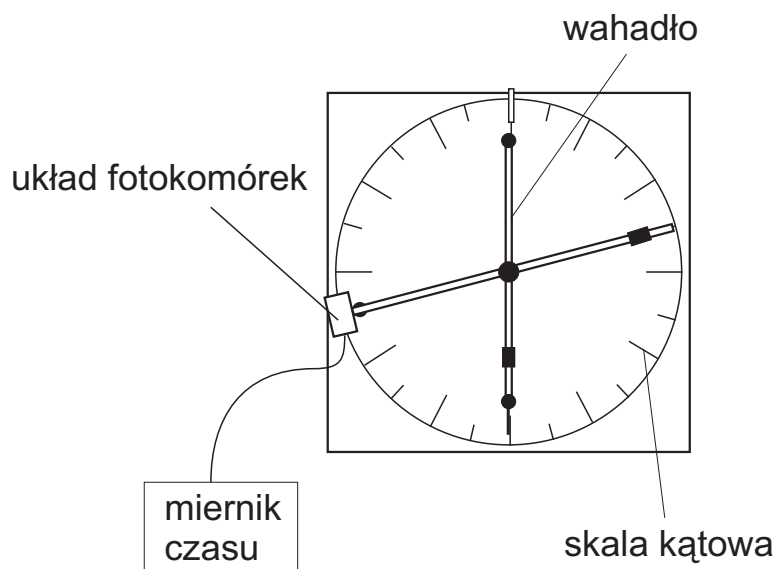
Przyrządy: wahadło fizyczne ze skalą kątową, miernik czasu z układem fotokomórek (schemat układu pomiarowego przedstawiony jest na rysunku 1.1.2).

Badanie zależności okresu od amplitudy

Zmierzyć okres drgań wahadła T w zależności od amplitudy θ_0 przy stałym położeniu fotokomórki, np. w najniższym położeniu wahadła.

Sprawdzanie bilansu energetycznego

Fotokomórkę umieścić w najniższym położeniu wahadła. Zmierzyć prędkość $\dot{\theta}$ w zależności od kąta początkowego θ_0 . W tej serii pomiarów ze wzrostem kąta początkowego ustalamy coraz większą całkowitą energię mechaniczną układu. Prędkość w całym



Rys. 1.1.2: Schemat układu do badania drgań anharmonicznych.

doświadczeniu obliczać jako odwrotność czasu przelotu pomiędzy bramkami. Przyjąć umowne jednostki prędkości, ponieważ jest to wystarczające do naszych rozważań. Ponadto unika się kłopotliwego pomiaru odległości kątowej pomiędzy bramkami.

W następnej serii pomiarów wahadło wprowadzić w ruch za każdym razem z ustalonego położenia początkowego θ_0 . W ten sposób układ ma za każdym razem tę samą całkowitą energię mechaniczną. Zmierzyć prędkość $\dot{\theta}$ w funkcji kąta θ_1 pod jakim umieszczona jest fotokomórka. Wahadło nie może być w ruchu dłużej niż przez czas połowy jednego drgania, aby wpływ tarcia był minimalny.

Badanie dyssypacji energii

Wahadło wprowadzić w ruch z ustalonego położenia początkowego θ_0 . Zmierzyć prędkość $\dot{\theta}$ w zależności od kąta θ_1 , w którym umieszczona jest fotokomórka. Tym razem notować prędkości w obu kierunkach i na przestrzeni kilku okresów.

1.1.3 Opracowanie wyników

Zależność okresu od amplitudy

Narysować wykres zależności T od θ_0^2 dla danych doświadczalnych i dopasować prostą $T = a\theta_0^2 + b$ (wykorzystać tylko punkty z przedziału od 0 do 1 rad²). Parametry otrzymane z dopasowania porównać z przewidywaniami równania (1.1.10). Parametr $b = T_0$ porównać ze zmierzonymi wartościami okresu T dla małych wychyleń. Sprawdzić czy stosunek parametrów b i a zgodnie z równaniem (1.1.10) w granicy niepewności

wynosi $b/a = 16$. Narysować wykres zależności T/T_0 od θ_0 dla danych doświadczalnych. Na tym samym wykresie przedstawić zależność teoretyczną daną równaniem (1.1.9).

Bilans energetyczny

Narysować wykresy zależności $\dot{\theta}^2$ od $(1 - \cos \theta_0)$ oraz $\dot{\theta}^2$ od $(\cos \theta_1 - \cos \theta_0)$. Do danych eksperymentalnych dopasować zależność liniową i obliczyć współczynnik korelacji. Z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że energia kinetyczna wahadła w najniższym położeniu jest równa energii potencjalnej wahadła w najwyższym położeniu. Dlatego oczekujemy zależności liniowej $\dot{\theta}^2$ od $(1 - \cos \theta_0)$. Ponieważ w każdej chwili energia kinetyczna wahadła jest równa ubytkowi energii potencjalnej wahadła, to również w drugim przypadku oczekujemy zależności liniowej zmiennych $\dot{\theta}^2$ od $(\cos \theta_1 - \cos \theta_0)$. Oznacza to, że w obydwóch przypadkach powinno otrzymać się współczynnik korelacji bliski jedności. W rozważaniach tych pominięto wpływ tarcia, który rozważany jest w przypadku dyssypacji energii.

Dyssypacja energii

Na wykresie fazowym $(\theta, \dot{\theta})$ zaznaczyć kolejne pozycje wahadła. Zaobserwować stopniowe zbliżanie się do punktu $(0, 0)$. Wynik ten potwierdza istnienie tarcia w układzie, które powoduje stopniowe zmniejszanie całkowitej energii mechanicznej układu. Energia mechaniczna zamienia się na inne formy energii, głównie na ciepło.